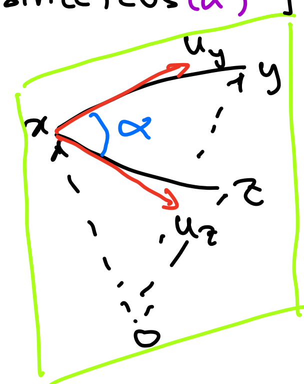
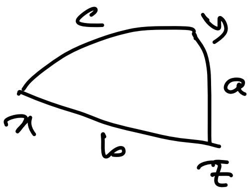
$$\left[\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)\right]$$

(Τα a, b, c είναι μήκη)





u_y, u_z μοναδιαία ώστε

$\mathrm{span}(x, y) = \mathrm{span}(x, u_y)$

$\mathrm{span}(x, z) = \mathrm{span}(x, u_z)$

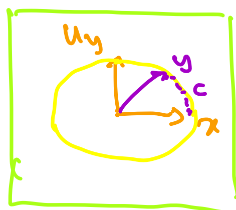
Επομένως

$$y = (x\cdot y)x + (y\cdot u_y)u_y$$

Θυμ. ότι $c = \mathrm{Arccos}(x\cdot y)$

οπότε $x\cdot y = \cos(c)$

Επιπλέον $y\cdot u_y = \sin(c)$



δηλ.

$$y = \cos(c)x + \sin(c)u_y$$

Παρόμοια, καθώς

$$b = d(x,z) = \mathrm{Arccos}(x\cdot z)$$

$$z = (x\cdot z)x + (z\cdot u_z)u_z = \cos(b)x + \sin(b)u_z$$

Έτσι, καθώς για την 3η πλευρά

$$\cos(a) = y\cdot z = (\cos(c)x + \sin(c)u_y)\cdot(\cos(b)x + \sin(b)u_z)$$

$$= \cos(b)\cos(c)\overbrace{x\cdot x}^{1} + \dots \overbrace{x\cdot u_z}^{0} + \dots \overbrace{u_y\cdot x}^{0} + \sin(b)\sin(c)\,u_y\cdot u_z$$

$$= \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha) \checkmark$$

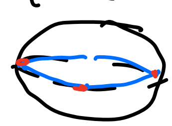
$u_y\cdot u_z = \|u_y\|\,\|u_z\|\cos\alpha$

Πόρισμα: Για σφαιρικό τρίγωνο $\Delta(x,y,z)$ (μη-εκφυλισμένο) στην S^2, έχουμε ανισότητες

(1) $|b-c| < a < b+c$

(2) $a+b+c < 2\pi$

(άθροισμα μηκών πλευρών του Δ) $<$ ~~περίμετρος~~ μήκος του κύκλου.



Θα δούμε τριγων. ανισ. για να επιβεβαιώσουμε ότι έχουμε μετρική d

Και αντίστροφα, αν $a, b, c \in (0, \pi)$ ικανοποιούν τις (1) & (2), τότε υπάρχει σφαιρικό τρίγωνο με πλευρές αυτά.

Απ. Καθώς, για γωνία στο $(0,\pi)$, $|\cos(\cdot)| < 1$ έχουμε, από το προηγούμενο, ότι

$$|\cos(\alpha)| = \left|\frac{\cos(a) - \cos(b)\cos(c)}{\sin(b)\sin(c)}\right| < 1$$

Θυμ. ταυτότητες $\cos(b \pm c) = \cos b\cos c \mp \sin b \sin c$

$$-1 < \frac{--}{--} < 1 \implies \cos a < \cos b\cos c + \sin b\sin c = \cos(b-c)$$

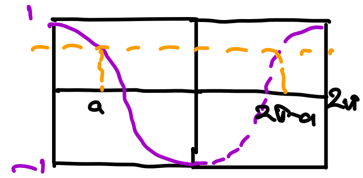
$$\cos a > \cos b\cos c - \sin b \sin c = \cos(b+c)$$

$$\underline{\cos(b+c) < \cos a} < \cos(b-c)$$

Καθώς η cos είναι φθίνουσα στο $(0,\pi)$

$$a < \underline{b+c < 2\pi - a}$$

↳ $a+b+c<2\pi$ (2)



Για τα υπόλοιπα, δουλεύουμε στις ανισότητες, και τελικά, έχουμε $b<c+a$, $c<a+b$ ...(1)

— // —

Στην S^2, έχουμε δράση της ορθογώνιας ομάδας $O(3,\mathbb{R})$ καθώς κάθε στοιχείο της $O(3)$ διατηρεί μήκους.

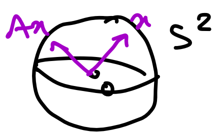
Ταυτίζονται με 3x3 ορθογώνιους πίνακες την $O(3)$.

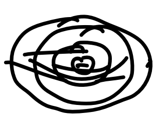
$A\in O(3) \iff \|Ax\|^2=\|x\|^2 \to A^TA=I$, δηλ. $A^T=A^{-1}$

$x^T\underline{A^TA}x = x^Tx$. και $\det(A^TA)=\det A^T\det A$
$= (\det A)^2 = 1$

Η υπο-ομάδα $SO(3)\subset O(3)$

έχει $\det A=+1$ και τα στοιχεία λέγονται περιστροφές.



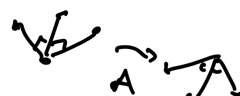


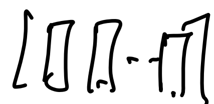
Η $O(3)$ δρα μεταβατικά στην S^2 αφού υπάρχει μία τροχιά.

(Και γενικά, η $O(n+1)$ δρά στην S^n μεταβατικά.)

Μάλιστα, η $O(n+1)$ δρα μεταβατικά στο σύνολο όλων των ορθοκανονικών βάσεων!

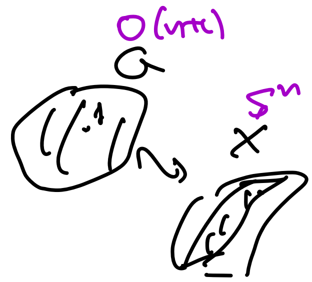
Αλλά και η $SO(n+1)$ δρα μεταβατικά στο σύνολο των βάσεων με ίδιο προσανατολισμό, καθώς $\det A > 0$ ($=1$)



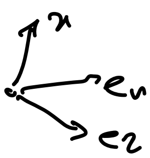


Τώρα, αν $\|x\|=1$ και θεωρήσουμε την τροχιά

$$O_x=\{Ax, A\in O(n+1)\}$$



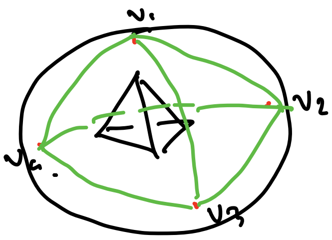
Η υπο-ομάδα σταθεροποίησης του x G_x είναι stabilizer subgrp. A τ.ω. $Ax=x$



Επεκτείνουμε σε ο.κ. βάση $\{x, e_2, \dots, e_n\}$ οπότε $Ax=x$ σημαίνει 1η στήλη είναι $\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

(Άσκηση :) $G_x = O(n)$

Αποδεικνύεται ότι έτσι η σφαίρα $S^n \cong O(n+1)/O(n)$ (ομογενής χώρος)



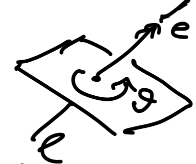
Ενδιαφέρουν ομάδες συμμετρίας π.χ. κανονικών πολυέδρων ή ισοδύναμα, συμμετρικές tilings της σφαίρας.

Στο π.χ. έχουμε 4 όμοια σφαιρικά τρίγωνα (περιβάλλοντας το τετράεδρο) και μας ενδιαφέρουν $A \in SO(3)$ που να το στέλνουν στον εαυτό του. Οδηγούμαστε στη θεώρηση πεπερασμένων υπο-ομάδων της $SO(3)$ (περιστροφές)

Καταρχήν έχουμε:

Πρόταση (Euler) Κάθε $A \in SO(3)$ είναι περιστροφή γύρω από κάποιον άξονα $\ell = \mathrm{span}(e)$, κατά γωνία $\theta \in [0,\pi]$ όπου η γωνία είναι με θετική φορά ως προς με το e: (με $\|e\|=1$)

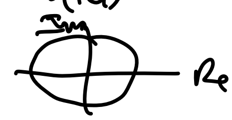
Απόδειξη: $A \in SO(3)$: $A^T = A^{-1}$ και $\det A = 1$



Ισχ. όλες οι ιδιοτιμές του A, $\lambda \in \mathbb{C}$: $|\lambda| = 1$

$$\|Au\|^2 = \|\lambda u\|^2 \quad (Au = \lambda u \text{ ι-τιμή/ιδιάνυσμα})$$
$$\|u\|^2 = |\lambda|^2 \|u\|^2 \quad \checkmark$$

Έτσι $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$ μοναδιαίο κύκλο



Καθώς είμαστε στο $\mathbb{R}^3$, και καθώς λ ι-τιμή $\Leftrightarrow$ $\bar{\lambda}$ ι-τιμή, και έχουμε 3 ι-τιμές, μία πρέπει να είναι πραγματική, μάλιστα $\lambda = \pm 1$

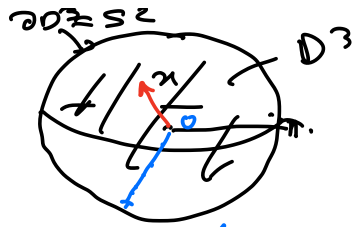
Για ν.δ.ο $\lambda = +1$ είναι ι-τιμή, αρκεί ν.δ.ο $\det(A - I) = 0$ $\left(\det(A - \lambda I)\big|_{\lambda=1}\right)$

Απ:
$$\det(A-I) = \det(A-I)^T = \det(A^T - I) = \det(A^{-1} - \underset{A^{-1}A}{I}) = \det(A^{-1}(I-A)) =$$
$$= \underbrace{\det A^{-1}}_{1 = \cancel{(\det A)^{-1}}} \det(I-A) = \det(\underbrace{I-A}_{-I(A-I)}) = \underbrace{\det(-I)}_{-1 \;(3d)} \det(A-I)$$
$$= -\det(A-I) \quad //$$

Πρόταση: (1) $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$
(2) $S^3 \longrightarrow \overset{2}{SO}(3)$ διπλή κάλυψη.

Απ. Βασίζεται στην Πρόταση (Euler): κάθε $A \in SO(3)$ ένα άξονα και γωνία περιστροφής: ζεύγος (e, θ) με $\|e\| = 1$ και $\theta \in [0,\pi]$

Θεωρώ 3d μπάλα $D^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq \pi\}$

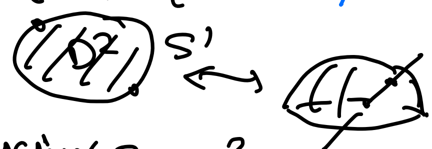


Στο 0 αντιστοιχώ τον I.

Για $x \neq 0$, αντιστοιχώ άξονα $e = \frac{x}{\|x\|}$

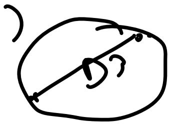
και γωνία $\theta = \|x\|$

Θυμηθείτε ότι, ακριβώς όπως και το $\mathbb{RP}^2$ το παίρνουμε ταυτίζοντας αντιδιαμετρικά σημεία συνοριακού κύκλου $S^1 = \partial D^2$



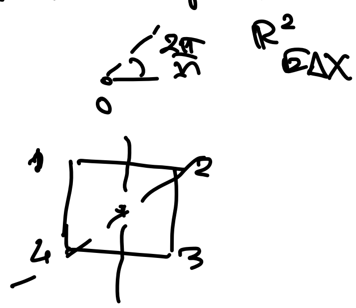
έτσι και το $\mathbb{RP}^3$ είναι D^3, με ταύτιση αντιδιαμετρικών σημείων της $S^2 = \partial D^3$

Παρατηρώντας ότι τα ζεύγη (e, π) και $(-e, \pi)$ δίνουν ίδια περιστροφή, έχουμε την ταύτιση $SO(3)$ με το $\mathbb{RP}^3$



Το (2) είναι γνωστό καθώς πάντα, για κάθε ΤΧ έχουμε S^n καλύπτει το $\mathbb{RP}^n$ δύο φορές //

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: (1) 2d. Κάθε πεπερ. υποομάδα της ομάδας $O(2)$ είναι είτε κυκλική ή ομάδα συμμετρίας κ-γώνου (της $SO(2)$ μόνο κυκλικές)



(2) 3d Κάθε πεπερ υπο-ομάδα της $SO(3)$ είναι ισόμορφη με μία από τις παρακάτω:

(a) κυκλική C_n

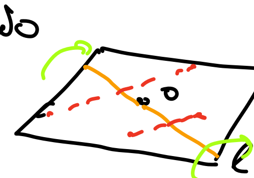
(b) διεδρικές D_{2n} (συμμ. κ-γώνου)

(c) ομάδες συμμετρίας των κανονικών πολυέδρων, και συγκεκριμένα T των τετραέδρων 

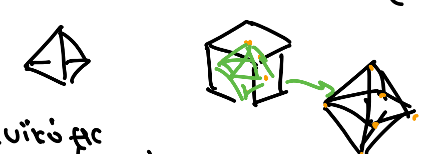
O των οκταέδρων 

και I των 20-έδρων

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Ανάκλαση σε επίπεδο είναι στην $O(2) \setminus SO(2)$, αλλάζει προσ/μό, αλλά στο $\mathbb{R}^3$, είναι στοιχείο της $SO(3)$!



2) 5 κανονικά πολύεδρα

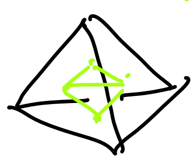


Δυϊκό με τον εαυτό του

Δυϊκά

12 e 20

Δυϊκά



Πλήρης απόδειξη, που βασίζεται στην δράση, τροχιές και μέτρηματα με αυτές (δείτε βιβλία Armstrong: Groups & Symmetry, Artin M. Algebra)