ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ II

Πρώτη Εργασία: Αφινική και Προβολική Γεωμετρία

Γράφουμε ομογενείς συντεταγμένες με αγκύλη, π.χ. $[3, 3, 1]$, *οπότε Σημείο προβολικού χώρου* $P(V^{n+1})$ *γράφεται ως προς δοθείσα βάση του ΔΧ είτε μέσω των ομογενών συντεταγμένων, είτε μέσω της κανονικής προβολής* $p : V^{n+1} - \{0\} \to P(V)$*:*

$$m = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i b_i \neq \mathbf{0}$$

(Γράψαμε Σημείο, με κεφαλαίο σίγμα, για να θυμόμαστε ότι είναι στοιχείο ΠΧ και όχι ΑΧ.)

1. Βρείτε τους αφινικούς χώρους που ορίζονται από τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων

$$(i)\ 2x - 3y + z = 0 \quad \text{στο } \mathbf{R}^3$$

$$(ii) \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y + z + 2w & = & 4 \\ -x + 2y + 2z - w & = & 5 \end{array} \right. \quad \text{στο } \mathbf{R}^4.$$

   Ορίστε αφινική απεικόνιση από τον πρώτο στον δεύτερο η οποία να στέλνει τα σημεία βάσης μέσα των πλευρών του τριγώνου που ορίζει η βάση του δεύτερου χώρου. Τέλος, βρείτε τον αφινικό χώρο που δίνεται ως η **τομή** του ΑΧ (ii) με τον ΑΧ που ορίζει η εξίσωση

$$x + y + z + w = 1.$$

2. (α΄) Δώστε αποδείξεις όλων των ισχυρισμών που δώσαμε στην παρουσίαση των δυϊκών χώρων (μηδενιστές, ύπαρξη δυϊκής βάσης, θεωρήματα διαστάσεων: αν U, W είναι προβολικοί υποχώροι του $P(V)$, τότε

$$\dim(< U \cup W >_P) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W),$$

   όπου γράψαμε $< .,. >_P$ για το προβολικό ανάπτυγμα pr-span κλπ).

   (β΄) Στο προβολικό επίπεδο $P(\mathbf{R}^3)$ δίνονται *προβολικές* ευθείες μέσω αφινικών ευθειών στο αφινικό επίπεδο/χάρτη $\{z = 1\}$:

$$2x + 3y = -1, \quad -3x + 5y = 2.$$

   Βρείτε τα επίπεδα που ορίζουν στον χώρο $\mathbf{R}^3$ οι δύο αυτές ευθείες και δώστε το σημείο του ΠΧ που είναι η τομή τους. Θέλουμε τώρα να "στείλουμε το σημείο τομής στο άπειρο": επιλέξτε αφινικό επίπεδο $X \subset \mathbf{R}^3$ τέτοιο ώστε το σημείο τομής των δύο προβολικών ευθειών να βρίσκεται στην προβολική ευθεία ∞_X. Είναι αυτό το X μοναδικό;

3. Βρείτε την ομογραφία ή οποία στέλνει τα Σημεία $[1,2],[2,1],[5,3]$ της προβολικής ευθείας $P(\mathbf{R}^2)=\mathbf{R}P^1$ στα Σημεία $[-1,2],[2,-3],[4,1]$.

4. (α΄) Δείξτε ότι τα Σημεία του προβολικού επιπέδου $P(\mathbf{R}^3)$

$$[2,-1,3],\ [1,1,-2],\ [1,0,3],\ [-1,2,-1]$$

ορίζουν προβολική βάση, αλλά αν αντικαταστήσουμε το τέταρτο Σημείο $[-1,2,-1]$ από το $[3,2,-1]$, τότε δεν έχουμε βάση. Βρείτε την Ευθεία που περιλαμβάνει τρία από τα Σημεία αυτά στην δεύτερη αυτή περίπτωση .

(β΄) Για την αρχική επιλογή, δώστε τις εικόνες των Σημείων της προβολικής βάσης για την ομογραφία που δίνεται από τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

και εκφράστε τα ως προβολική βάση του $P(\mathbf{R}^3)$.

5. (α΄) Βρείτε τους Ιακωβιανούς πίνακες των παραγώγων των συναρτήσεων αλλαγών χαρτών του προβολικού χώρου $\mathbf{R}P^n$ $\pi_j\circ\pi_i^{-1}$ και υπολογίστε το πρόσημο της ορίζουσάς τους.

(β΄) Βασισμένοι στα παραπάνω, δείξτε ότι ο προβολικός χώρος είναι προσανατολίσιμος για n περιττό, και μη-προσανατολίσιμος για n άρτιο.

(γ΄) Δείξτε το ίδιο αποτέλεσμα μελετώντας κατά πόσο η προβολική ομάδα του $\mathbf{R}P^n$ είναι δρομοσυνεκτική ή όχι.

6. Δώστε τις λεπτομέρειες της απόδειξης του θεωρήματος διάστασης για υποχώρους προβολικού χώρου: αν U,W είναι προβολικοί υποχώροι του $P(V)$, τότε

$$\dim(< U\cup W >_P)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W),$$

όπου γράψαμε $< .,. >_P$ για το προβολικό ανάπτυγμα pr-span.

7. Δώστε τις λεπτομέρειες της επαλήθευσης των δράσεων στα παραδείγματα που δώσαμε και δείξτε τους ισχυρισμούς που δώσαμε για την μεταβατικότητα ή μη της κάθε δράσης. Βρείτε τις υπο-ομάδες σταθεροποίησης (stabilizer subgroup), περιλαμβάνοντας επιπλέον και την δράση της ορθογώνιας ομάδας $O(n,\mathbf{R})$ σε σφαίρα S^n (και όποιες άλλες περιπτώσεις σας ενδιαφέρουν!)

8. Δείξτε ότι σε προβολικό χώρο $P(V^{n+1})$ τα $(n+2)$ Σημεία $\{m_i\}_0^{n+1}$ δίνουν προβολική βάση εάν και μόνο εάν κάθε συλλογή $(n+1)$ Σημείων από αυτά είναι προβολικά ανεξάρτητη.

ΕΚ, 6/4/22