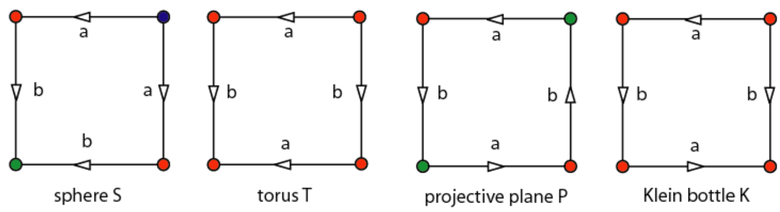
Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικη Τοπολογια 2021-22
Πρώτη Εργασία

1. Διαβάστε τις σημειώσεις πάνω στη *Διανυσματική Ανάλυση* και απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις που βρίσκονται μέσα στο κείμενο (υπάρχουν οκτώ τέτοια ερωτήματα, με πλάγια γραμματοσειρά, σε παρενθέσεις).

2. Υπολογίστε τη χαρακτηριστική του Euler όλων των συμπαγών επιφανειών, προσανατολίσιμων και μη, βασισμένοι στις παραστάσεις τους ως χώροι πηλίκο πολυγώνου. Παραδείγματος χάρην, προσανατολίσιμη επιφάνεια Σ_g παράγεται από την ταύτιση των πλευρών κανονικού πολυγώνου με $2g$ πλευρές με τον εξής τρόπο (παίρνουμε με τη σειρά τις πλευρές):
$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, \text{ π.χ. για τον τόρο: } \quad aba^{-1}b^{-1}.$$
(Συμβουλευτείτε το πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου του Massey για λεπτομέρειες.) Έτσι, για προσανατολίσιμη επιφάνεια, $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$.



3. Δείξτε ότι εάν για τοπολογικό χώρο X η συνεχής απεικόνιση $f : X \to S^n$ ($n \geq 1$) *δεν είναι επί*, τότε η f είναι μηδεν-ομοτοπική, δηλαδή ομοτοπική με τη σταθερή συνάρτηση.

4. Δείξτε ότι:

   (α΄) Το επίπεδο μείον πεπερασμένο αριθμό διακριτών σημείων έχει ως παραμορφωτικό σύμπτυγμα ένα ¨μπουκέτο¨ κύκλων, δηλαδή κύκλους με ένα κοινό σημείο.

   (β΄) Ο χώρος $\mathbf{R}^3$ μείον η ευθεία $\{(0, 0, z) : z \in \mathbf{R}\}$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του κύκλου S^1. Γενικότερα, για $m < n$, ο χώρος $\mathbf{R}^n - \mathbf{R}^m$ έχει τον τύπο ομοτοπίας σφαίρας S^{n-m-1}.

5. Ορίσαμε σύμπτυξη (retraction) ως συνεχή $r : X \to A$, με $r(a) = a$, δηλαδή $r \circ \iota = Id_A$ και *παραμορφωτική σύμπτυξη* εάν έχουμε ομοτοπία που να παραμορφώνει την ταυτοτική στην r, δηλαδή $H : \iota \circ r \simeq Id_X$. Εάν επιμείνουμε να ισχύει και ότι $H(a, t) = a$ $\forall t$ (όχι μόνο $H(a, 1) = a$), τότε έχουμε την έννοια της strong deformation retraction. Συνήθως, για καλούς ΤΧ, μία παραμορφωτική σύμπτυξη είναι και SDR. Δείξτε το εξής αντι-παράδειγμα:

Έστω X ο χώρος στο $\mathbf{R}^2$ που είναι η ένωση των κλειστών διαστημάτων από το (0,0) στα σημεία $(1, 1/n)$. Δείξτε ότι το $\{(0,0)\}$ είναι SDR του X, αλλά το $\{(1,0)\}$, ενώ είναι παραμορφωτική σύμπτυξη του X, δεν είναι SDR.

6. Δείξτε ότι η ορθογώνια ομάδα $O(n, \mathbf{R})$ είναι SDR της γενικής ομάδας $Gl(n, \mathbf{R})$ *(υπόδειξη: Gram-Schmidt).*

7. Δώστε παράδειγμα συνεχούς απεικόνισης $f : X \to Y$ που είναι επί αλλά όχι 1:1 και τέτοια ώστε ο ομομορφισμός $\pi(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ να είναι 1:1 αλλά όχι επί.

   Βρείτε και f, X, Y με την f 1:1 αλλά όχι επί που να δίνει $\pi(f)$ επί αλλά όχι 1:1.

8. Συχνά βολεύει να χαλαρώσουμε την σταθερότητα του σημείου βάσης: λέμε ότι δύο βρόχοι $g, g : I \to X$ είναι **ελεύθερα ομοτοπικοί** εάν υπάρχει ομοτοπία $H : I \times I \to X$ με $H(s, 0) = f(s)$, $H(s, 1) = g(s)$ και $H(0, t) = H(1, t)$, δηλαδή έχουμε βρόχο για κάθε τιμή της παραμέτρου της ομοτοπίας.

   Δείξτε ότι: δύο βρόχοι $f : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ και $g : (I, \partial I) \to (X, x_1)$ είναι ελεύθερα ομοτοπικοί εάν και μόνο εάν υπάρχει δρόμος $h : I \to X$ από το σημείο βάσης x_0 του f στο σημείο βάσης x_1 του g τέτοιο ώστε $f \simeq_p h * g * \overline{h}$.

9. Δείξτε ότι κάθε μία από τις παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμη με την απλή συνεκτικότητα χώρου X:

   (αʹ) Ο X είναι δρομοσυνεκτικός και για κάθε $x_0 \in X$, η $\pi_1(X, x_0)$ είναι τετριμμένη ομάδα.

   (βʹ) Κάθε βρόχος $f : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ είναι ομοτοπικός με την σταθερή απεικόνιση $e_{x_0} : I \to X$.

   (γʹ) Για κάθε ζεύγος σημείων, κάθε δύο δρόμοι που τα συνδέουν είναι δρομο-ομοτοπικοί.

   (δʹ) Ο X είναι δρομοσυνεκτικός και κάθε βρόχος είναι ελεύθερα ομοτοπικός με σταθερό βρόχο.

   (εʹ) Κάθε δύο απεικονίσεις $f, g : S^1 \to X$ είναι ομοτοπικές.

   (ϛʹ) Ο X είναι δρομοσυνεκτικός και κάθε συνεχής $f : S^1 \to X$ έχει συνεχή επέκταση στον δίσκο $D^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (όπου θεωρήσαμε τον κύκλο ως $S^1 = \partial D^2$.)

10. Έστω $A \subset X$ υποχώρος και επιλέγουμε σημείο βάσης στο A. Εάν $r : X \to A$ είναι σύμπτυξη, τότε $r_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$ είναι επί. Εάν $i : A \hookrightarrow X$ είναι ο εγκλεισμός, τότε η $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ είναι 1:1. Επομένως, εάν έχουμε παραμορφωτική σύμπτυξη από το X στο A, τότε ο i_* είναι ισομορφισμός.

11. Μία παράσταση της θεμελιώδους ομάδας του προβολικού επιπέδου είναι

$$\pi_1(\mathbf{R}P^2) \simeq < c \,|\, c^2 >,$$

   πρόκειται δηλαδή για την αβελιανή ομάδα $\mathbb{Z}_2$ (εδώ $c = ab$ είναι βρόχος γεννήτορας της ΘΟ του $U_2 \simeq S^1$).

   Δώστε γεννήτορα α της ομάδας, δηλαδή βρόχο στο τετράγωνο που ορίζει τον προβολικό χώρο με τις γνωστές ταυτίσεις, τέτοιον ώστε η σύνθεση με τον εαυτό του δίνει βρόχο ομοτοπικό με τον τετριμμένο. Δείξτε σε σχήμα τα βήματα της ομοτοπίας.

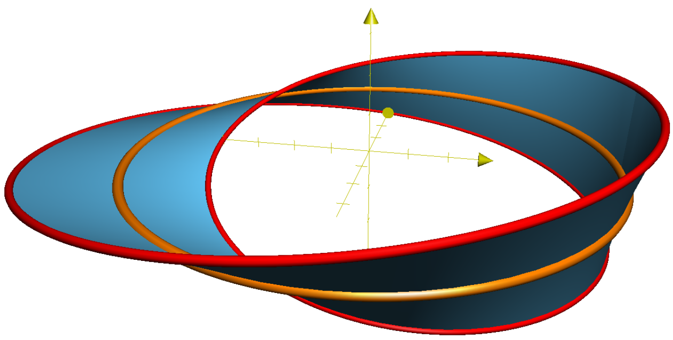
12. (α′) Δείξτε ότι ο τόρος T^2 μείον ένα σημείο του έχει τον τύπο ομοτοπίας μπουκέτου δύο κύκλων $S^1 \vee S^1$.

    (β′) Δείξτε ότι ο κύκλος S^1 είναι σύμπτυξη του $S^1 \vee S^1$, αλλά δεν υπάρχει παραμορφωτική σύμπτυξη.

13. Η ταινία του Möbius $\mathcal{M}$ προκύπτει από την ταύτιση δύο απέναντι ακμών του τετραγώνου, με αντίθετη φορά. Γεωμετρικά, έχουμε επιφάνειας στο χώρο, παραδείγματος χάρην με δύο παραμετρήσεις

$$\mathbf{r}(t,u) = ((3 - t\sin u)\cos 2u, (3 - t\sin u)\sin 2u, t\cos u), \quad t \in (-1,1)$$

με $u \in (0,\pi)$ για την πρώτη και $u \in (-\pi/2, \pi/2)$ για τη δεύτερη παραμέτρηση.



Δείξτε ότι υπάρχει παραμορφωτική σύμπτυξη της $\mathcal{M}$ στον κεντρικό της κύκλο ($t = 0$) και επομένως η ταινία έχει τον τύπο ομοτοπίας του κύκλου, αλλά δεν υπάρχει σύμπτυξη στον συνοριακό κύκλο της ($t = \pm 1$).

14. Στον τόρο $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, με α, β τους βρόχους

$$\alpha(t) = (e^{2\pi i t}, 1), \quad \beta(t) = (1, e^{2\pi i t}), \quad t \in I,$$

δείξτε (με χρήση κατάλληλου διαγράμματος) ότι $\alpha * \beta = \beta * \alpha$ (έτσι δικαιολογούμε και γεωμετρικά ότι η θεμελιώδης ομάδα είναι αβελιανή).

15. Μία ομάδα G λέγεται **τοπολογική ομάδα** εάν έχει δομή τοπολογικού χώρου με τις απεικονίσεις γινομένου και αντιστρόφου να είναι συνεχείς:

$$\mu : G \times G \to G, \quad \iota : G \to G,$$

όπου $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ και $\iota(g) = g^{-1}$. Θεωρούμε τη θεμελιώδη ομάδα της G με σημείο βάσης τη μονάδα e. Εάν f, g είναι βρόχοι βασισμένοι στο e, ορίζουμε βρόχο γινόμενο $f \cdot g$ μέσω του γινομένου στην G: $(f \cdot g)(t) = f(t)g(t)$, $t \in I$.

Δείξτε ότι το γινόμενο των f, g στην π_1 είναι στην ίδια κλάση ομοτοπίας με τον παραπάνω βρόχο γινόμενο, $f * g \sim f \cdot g$, αλλά και $f \cdot g \sim g * f$, και επομένως η θεμελιώδης ομάδα της G είναι *αβελιανή*.

ΕΚ, 11/4/22