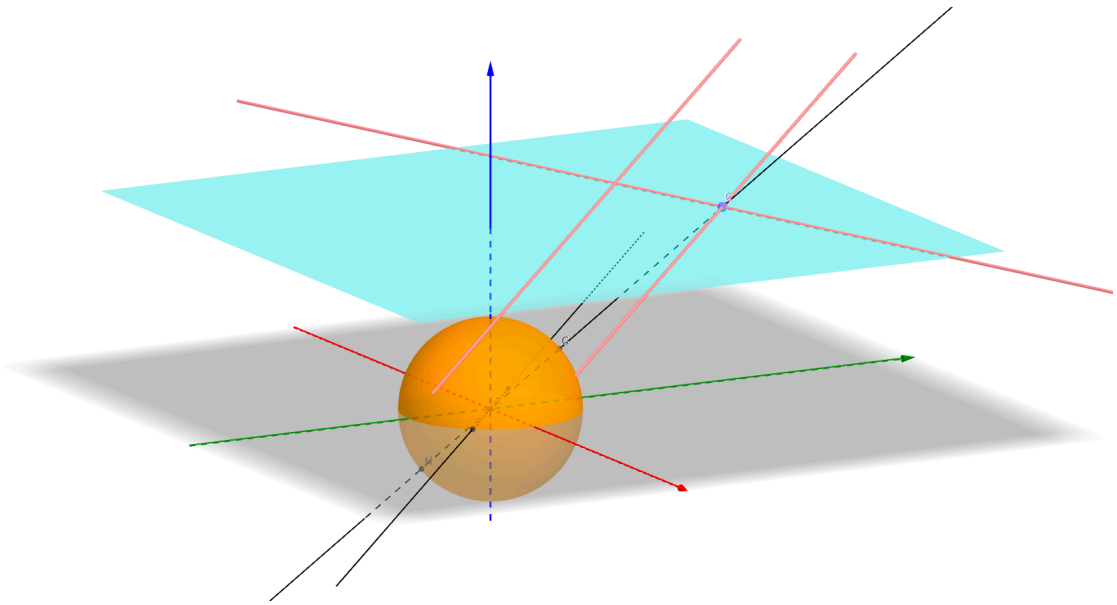
Εισαγωγή στην

Αναλυτική Γεωμετρία

[Απόσπασμα συγγράμματος]

Ε. Καππος
Τμήμα Μαθηματικών
Σχολή Θετικών Επιστημών Α.Π.Θ.



Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Θεσσαλονίκη 2020

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα **i**

1 Επισκόπηση Γραμμικής Άλγεβρας **1**
1.1 Διανυσματικοί χώροι 1
1.1.1 Αλλαγή βάσης και αλλαγή μεταβλητών 5
1.2 Γραμμικές απεικονίσεις 7
1.3 Ορίζουσες 8
1.4 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων 10
1.5 Εξισώσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο 14
1.5.1 Ευθείες 14
1.5.2 Επίπεδα 15
1.5.3 Αφινικοί συνδυασμοί 16
1.6 Ασκήσεις 16

2 Αφινική Γεωμετρία **19**
2.1 Ορισμός και απλά παραδείγματα 19
2.2 Υποχώροι, ανεξαρτησία και βάσεις 23
2.3 Τα βασικά παραδείγματα αφινικών χώρων 29
2.3.1 Ένα λεπτομερές παράδειγμα 32
2.4 Αφινικές απεικονίσεις 33

3 Παραρτήματα **35**
3.1 Το φασματικό θεώρημα 35
3.2 Το κριτήριο του Sylvester και γενικεύσεις του 35

4 Ασκήσεις **39**

Κεφάλαιο 1

Επισκόπηση Γραμμικής Άλγεβρας

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε ένα "περίγραμμα" των βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων της Γραμμικής Άλγεβρας. Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης έχει ολοκληρώσει τη μελέτη του αντικειμένου αυτού σε προηγούμενο μάθημα.

1.1 Διανυσματικοί χώροι

Ένας *διανυσματικός χώρος* είναι ένα σύνολο όπου ορίζεται μία πράξη, η πρόσθεση, η οποία δίνει στο σύνολο τη δομή αβελιανής ομάδας και, επιπλέον, ορίζεται γινόμενο με στοιχεία ενός σώματος k (συνήθως του $\mathbf{R}$ ή του $\mathbf{C}$) το οποίο ικανοποιεί κάποιες "*λογικές συνθήκες συμβατότητας*" με την πρόσθεση.

Πιό αναλυτικά, έχουμε στο σύνολο V πράξη $V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u + v$ με $v + u = u + v$, $(u + v) + w = u + (v + w)$. Υπάρχει μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}$, με $u + \mathbf{0} = u$ και για κάθε v στον V, αντίθετό του στοιχείο, $-u$, με $u + (-u) = \mathbf{0}$. Οι αριθμοί $\alpha, \beta, \ldots \in k$ δίνουν γινόμενο, $k \times V \to V$, $(\alpha, u) \mapsto ku$ με ιδιότητες

$$\beta(\alpha u) = (\beta\alpha)u,\ (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u,\ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v,\ \ 1u = u,\ 0u = \mathbf{0}.$$

Τα στοιχεία του V λέγονται *διανύσματα* και το μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}$ παίζει τον ιδιαίτερο ρόλο της αρχής ή αφετηρίας του διανυσματικού χώρου V. Υπάρχει πάντοτε σε κάθε Δ.Χ., ακόμα και τον τετριμμένο χώρο $\{\mathbf{0}\}$!

Κοντολογίς, σε Δ.Χ. V ορίζεται η έννοια του **γραμμικού συνδυασμού** διανυσμάτων, $\alpha u + \beta v$, όπου $u, v \in V$ και α, β αυθαίρετα στοιχεία του σώματος k (οπότε επιτρέπεται και ο τετριμμένος συνδυασμός που δίνει το $\mathbf{0}$.)

Παραδείγματα: Πρώτα δίνεται συνήθως το προφανές: το καρτεσιανό γινόμενο k^n (κυρίως $\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$) με διανύσματα n-άδες αριθμών, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και προφανή πρόσθεση και γινόμενο:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Για να πειστούμε ότι υπάρχουν και άλλης μορφής Δ.Χ., δίνεται το σύνολο $\mathcal{P}^n$ των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n (για κάποιο $n \geq 0$), με την συνήθη πρόσθεση πολυωνύμων, $p(x) + q(x)$ και προφανές γινόμενο $\alpha p(x)$. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι αν επιμέναμε σε σταθερού βαθμού πολυώνυμα, δεν θα είχαμε Δ.Χ., καθώς π.χ. ο γραμμικός συνδυασμός

$$(3x^3 - 4x^2 + 11x - 12) + (-3)(x^3 + 2x) = -4x^2 + 5x - 12$$

δίνει πολυώνυμο βαθμού δύο, όχι τρία.

Η αντιστοίχιση $\mathcal{P}^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ που στέλνει το πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ στο διάνυσμα $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ δείχνει ότι δεν έχουμε ουσιαστικά ξεφύγει από το Δ.Χ.–καρτεσιανό γινόμενο.

Το ίδιο συμβαίνει και αν θεωρήσουμε το σύνολο $\mathcal{M}^{m\times n}$ όλων των $m \times n$ πινάκων A με στοιχεία $a_{ij} \in k$: η πρόσθεση δύο πινάκων ίδιων διαστάσεων είναι καλά ορισμένη και έχουμε το γινόμενο βA, με στοιχεία βa_{ij}. Βλέπουμε εύκολα ότι έχουμε πάλι ουσιαστικά χώρο καρτεσιανό γινόμενο, διάστασης mn (εννοούμε φυσικά ότι η αντιστοίχιση δίνει ισομορφισμό Δ.Χ.). Στο σημείο αυτό αρχίζουμε να υποπτευόμαστε ότι ίσως οι Δ.Χ. k^n είναι οι μόνοι που υπάρχουν. Αυτό είναι αληθές (για τη διατύπωσή του βέβαια θα χρειαστούμε επιπρόσθετες έννοιες –γραμμικής ανεξαρτησίας, βάσης κλπ), αλλά ισχύει μόνο για Δ.Χ. πεπερασμένης διάστασης (ακριβή ορισμό της οποίας θα δώσουμε σύντομα).

Διανυσματικοί χώροι μη-πεπερασμένης διάστασης είναι, για παράδειγμα, οι χώροι: $k[x]$ (ή $\mathcal{P}$) όλων των πολυωνύμων σε μία μεταβλητή και χώροι συναρτήσεων. Τέτοιοι είναι οι $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ (συνεχείς συναρτήσεις), $C^k(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ (συναρτήσεις k φορές συνεχώς παραγωγίσιμες), $C^0(S^1, \mathbf{R})$ (περιοδικές συναρτήσεις) κ.ο.κ. Βεβαιωθείτε ότι "βλέπετε" γιατί έχουμε Δ.Χ. σε κάθε περίπτωση: η πρόσθεση και γινόμενο δίνονται *ανά σημείο:* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Στα παραδείγματα αυτά δεν μπορούμε (χωρίς επιπλέον ¨ανάλυση¨) να ισχυριστούμε ότι έχουμε ¨ουσιαστικά¨ κάποιας μορφής καρτεσιανό γινόμενο k^∞. Όπως έγινε αντιληπτό, έχουμε περάσει στα χωράφια της *Ανάλυσης* και θα αφήσουμε την μελέτη τους στην περιοχή αυτή. Εμείς περιοριζόμαστε στη Γεωμετρία και σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Χρειαζόμαστε λοιπόν επειγόντως ορισμό *διάστασης* ενός διανυσματικού χώρου! Προηγείται όμως η κρίσιμη έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας συνόλου διανυσμάτων.

Ο επίσημος ορισμός (που καλό είναι να γνωρίζετε) είναι ο εξής: ένα σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m\}$ διανυσμάτων του V (με $m \geq 1$) είναι **γραμμικά εξαρτημένο** εάν υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq \mathbf{0}$ (του k^m) με τον γραμμικό συνδυασμό που παράγει να δίνει το μηδενικό διάνυσμα:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = \mathbf{0} \in V.$$

Εάν ακόμα και ένα από τα διανύσματα που μας δίνονται είναι μηδενικό, έχουμε αυτόματα γραμμική εξάρτηση (επιλέγουμε $\alpha_i = 1$ για τον δείκτη του

μηδενικού διανύσματος και $\alpha_j = 0$ για τους υπόλοιπους συντελεστές.) Επίσης προφανές είναι ότι π.χ. τα $\{u, v, u+v\}$, είναι γραμμικά εξαρτημένα: $(u+v) - u - v = \mathbf{0}$.

Ορισμός 1.1. Το σύνολο διανυσμάτων $\{v_1, \ldots, v_m\}$ του χώρου V είναι **γραμμικά ανεξάρτητο** (ή τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα) εάν δεν υπάρχει σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ τους, δηλαδή, ισοδύναμα, εάν κάθε συνδυασμός τους που δίνει το $\mathbf{0}$,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = \mathbf{0} \in V,$$

συνεπάγεται ότι όλα τα α_i είναι ίσα με μηδέν.

Το κλασικό παράδειγμα είναι τα διανύσματα $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ του k^n, με μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο στη θέση i, καθώς γραμμικός συνδυασμός δίνει άμεσα

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \mathbf{0}.$$

Χρήσιμος είναι ο ορισμός του **αναπτύγματος** συνόλου διανυσμάτων:

$$\mathrm{span}(v_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}) = \{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j v_j \in V,\ \alpha_j \in k\}$$

όλων των γραμμικών συνδυασμών τους (με πεπερασμένο πλήθος όρων). Εδώ το σύνολο δείκτη $\mathcal{A}$ είναι αυθαίρετο.

Για ένα διάνυσμα $v \neq \mathbf{0}$, το ανάπτυγμα είναι όλα τα πολλαπλάσιά του, δηλαδή η ευθεία που περνά από το $\mathbf{0}$ στην κατεύθυνση του v. Για δύο μη-συνευθειακά (ή ταυτόγραμμα) διανύσματα, $\mathrm{span}(u, v)$ είναι επίπεδο που περνά από το $\mathbf{0}$. Καθώς ο ορισμός **υποχώρου** ενός Δ.Χ. είναι ακριβώς ότι είναι υποσύνολο του V κλειστό για γραμμικούς συνδυασμούς, βλέπουμε ότι *κάθε ανάπτυγμα δίνει υποχώρο του V!*

Στη συλλογή που έχουμε για να παράγουμε το ανάπτυγμα, ίσως υπάρχουν πλεονασμοί: διανύσματα τα οποία μπορούν να εκφρασθούν ως συνδυασμοί κάποιας υποσυλλογής. Τέτοιες σκέψεις μας οδηγούν στην έννοια της *βάσης* διανυσματικού χώρου.

Πριν περάσουμε σ' αυτό, ας δώσουμε κάποιες κρίσιμες ιδιότητες.

- Εάν $\{v_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* σύνολο διανυσμάτων, τότε οποιοδήποτε υποσύνολό του παραμένει γραμμικά ανεξάρτητο (εδώ $\mathcal{A}$ είναι ένα σύνολο δείκτη, για παράδειγμα $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, m\}$, αλλά πιθανόν και άπειρο).

- Εάν $\{v_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ είναι *γραμμικά εξαρτημένο* σύνολο διανυσμάτων, τότε και κάθε υπερσύνολό του, π.χ. το $\{w, v_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$, για w διάνυσμα του V, παραμένει γραμμικά εξαρτημένο.

Βάσεις: Ο τρόπος που θα ορίσουμε χώρο πεπερασμένης διάστασης δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικός: λέμε ότι ο Δ.Χ. V έχει **πεπερασμένη διάσταση** αν είναι ίσος με το ανάπτυγμα κάποιου πεπερασμένης πληθικότητας συνόλου διανυσμάτων του. Ο ορισμός αυτός αρκεί για να δείξουμε το βασικό αποτέλεσμα για ύπαρξη βάσης. **Βάση** του διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης είναι, όπως ξέρουμε, σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ με τις εξής δύο ιδιότητες: το ανάπτυγμά τους δίνει όλο τον V και είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Η βάση επιτρέπει να γράψουμε κάθε διάνυσμα με μοναδικό τρόπο ως γραμμικό συνδυασμό τους:

Θεώρημα 1.1. *Εάν $\mathcal{B}$ είναι βάση του χώρου V, τότε για κάθε $v \in V$ ορίζονται μοναδικοί αριθμοί x_i (οι συντεταγμένες του v ως προς τη βάση) τέτοιοι ώστε*

$$v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n.$$

Απόδειξη. Η ύπαρξη συντεταγμένων προκύπτει άμεσα από το $\operatorname{span}(\mathcal{B}) = V$. Για την μοναδικότητα, εάν $v = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_n b_n$ ήταν εναλλακτικός γραμμικός συνδυασμός που δίνει το v, αφαιρώντας, έχουμε

$$\mathbf{0} = (x_1 - y_1) b_1 + (x_2 - y_2) b_2 + \ldots + (x_n - y_n) b_n,$$

που από τη γραμμική ανεξαρτησία του $\mathcal{B}$ δίνει $x_i = y_i$ για όλα τα i. □

Παραθέτουμε κάποια βασικά και χρήσιμα αποτελέσματα για Δ.Χ.

Θεώρημα 1.2. *Κάθε διανυσματικός χώρος έχει σύνολο που είναι βάση του. Για χώρους πεπερασμένης διάστασης, ο αριθμός των διανυσμάτων σε κάθε βάση είναι σταθερός*

Η πληθικότητα κάθε βάσης είναι τότε η **διάσταση** του χώρου. Γράφουμε $\dim V = n$ και επομένως V^n.

Στο χώρο k^n, έχουμε τη **συνήθη** βάση $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, που έχουμε αναφέρει. Μερικές φορές θα θελήσουμε να θεωρήσουμε τη βάση με κάποια διάταξη, οπότε θα γράψουμε $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ που είναι διατεταγμένο σύνολο.

Θεώρημα 1.3 (Επέκταση σε βάση)**.** *Εάν $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου V, τότε το σύνολο αυτό μπορεί να επεκταθεί σε βάση, δηλαδή μπορούμε να βρούμε $n - m$ διανύσματα $b_{m+1}, \ldots, b_n$ ώστε το σύνολο $\{b_1, b_2, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n\}$ να δίνει βάση.*

Θεώρημα 1.4 (Αντικατάσταση)**.** *Έστω $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ βάση του V^n και $\{f_1, \ldots, f_m\}$ γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων. Τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε m από τα διανύσματα βάσης με τα f_j, δηλαδή να επιλέξουμε βάση*

$$\{f_1, \ldots, f_m, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{n-m}}\}, \quad b_{i_j} \in \mathcal{B}.$$

Σύνολο υποχώρων: Εάν U_1 και U_2 είναι υποχώροι του V, τότε η τομή τους $U_1 \cap U_2$ είναι πάντοτε υποχώρος του V, ενώ η ένωσή τους $U_1 \cup U_2$, γενικά, δεν δίνει υποχώρο (για παράδειγμα η ένωση δύο διακριτών ευθειών στο χώρο.) Για να ¨γεμίσουμε τα κενά,¨ με κάποιον τροπο, ορίζουμε το **άθροισμα υποχώρων**

$$U_1 + U_2 = \mathrm{span}(U_1, U_2),$$

δηλαδή το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών διανυσμάτων από την ένωση των δύο υποχώρων. Εύκολα βλέπουμε ότι αυτό είναι το ίδιο με το σύνολο

$$\{v \in V : \ v = u_1 + u_2, \ u_1 \in U_1, \ u_2 \in U_2\}$$

και ότι αποτελεί υποχώρο του V.

Από το θεώρημα επέκτασης βάσης, προκύπτει άμεσα το

Θεώρημα 1.5. *Με U_1, U_2 υποχώρους του V, $\dim V < \infty$, έχουμε*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Προσοχή: η τομή δύο υποχώρων δεν είναι ποτέ το κενό σύνολο —πάντα έχουν κοινό το $\mathbf{0}$. Εάν η τομή είναι ακριβώς το μονοσύνολο αυτό, δηλαδή $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$, τότε λέμε ότι έχουμε **ευθύ άθροισμα** και γράφουμε $U_1 \oplus U_2$ για το άθροισμά τους. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου $V = U_1 \oplus U_2$. Λέμε τότε ότι ο υποχώρος U_2 είναι συμπλήρωμα του υποχώρου U_1 (ή ανάποδα). Για παράδειγμα, $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^2 \oplus \mathbf{R}^1$, με $\mathbf{R}^2$ το οριζόντιο επίπεδο $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ και $\mathbf{R}^1$ την κάθετη ευθεία $\mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$. Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι το συμπλήρωμα ενός υποχώρου δεν είναι μοναδικό (για γνήσιους υποχώρους).

1.1.1 Αλλαγή βάσης και αλλαγή μεταβλητών

Είδαμε ότι έάν $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ είναι μία επιλογή βάσης του Δ.Χ. V^n, οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $v \in V$ ως προς την βάση $\mathcal{B}$ είναι οι μοναδικοί αριθμοί $x_1, \ldots x_n$ τέτοιοι ώστε

$$v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n.$$

Τώρα, έαν $\mathcal{D} = (d_1 d_2, \ldots, d_n)$ είναι μία άλλη βάση του V^n, έχουμε τις μοναδικές συντεταγμένες x'_i με

$$v = x'_1 d_1 + x'_2 d_2 + \ldots + x'_n d_n.$$

Ποιά είναι η σχέση μεταξύ των δύο συνόλων συντεταγμένων (x_i) και (x'_i);

Καθώς $\mathcal{B}$ είναι βάση, γράφουμε με μοναδικό τρόπο τα διανύσματα της δεύτερης βάσης

$$\begin{array}{rcl} d_1 & = & u_{11} b_1 + u_{21} b_2 + \ldots + u_{n1} b_n \\ d_2 & = & u_{12} b_1 + u_{22} b_2 + \ldots + u_{n2} b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ d_n & = & u_{1n} b_1 + u_{2n} b_2 + \ldots + u_{nn} b_n \end{array} \tag{1.1}$$

Ορίζεται λοιπόν $n \times n$ πίνακας $U = (u_{ij})$.

Είναι βολικό και βοηθά την κατανόηση, έστω και αν είναι ελαφρά ασαφής, ο εξής τρόπος διατύπωσης: θεωρούμε κάθε βάση $\mathcal{B}$ ως έναν πίνακα με n στοιχεία,[1] Έτσι, οι συντεταγμένες του διανύσματος είναι στοιχεία ενός *διανύσματος στήλης*, και γράφουμε

$$v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n = \mathcal{B} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Είναι τώρα σαφές ότι η αλλαγή βάσης 1.1 δίνεται με τον πολύ κομψό τρόπο

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathcal{B}U.}$$

Ο πίνακας U λέγεται *πίνακας αλλαγής βάσης*, από την βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{D}$.

Ανταλλάσοντας τους ρόλους των $\mathcal{B}$ και $\mathcal{D}$ και γράφοντας τα διανύσματα βάσης

$$b_i = s_{1i} d_1 + s_{2i} d_2 + \ldots + s_{ni} d_n, \quad i = 1, \ldots, n,$$

έχουμε πίνακα $S = (s_{ij})$ τέτοιον ώστε $\mathcal{B} = \mathcal{D}S$. Επομένως,

$$\mathcal{B} = \mathcal{D}S = (\mathcal{B}U)S = \mathcal{B}(US)$$

και πρέπει επομένως να είναι ο ένας πίνακας ο αντίστροφος του άλλου, δηλαδή $S = U^{-1}$ — το οποίο σημαίνει φυσικά ότι ο πίνακας αλλαγής βάσης U είναι αντιστρέψιμος.

Η αλλαγή μεταβλητών μπορεί τώρα να υπολογιστεί άμεσα:

$$v = \mathcal{B}\mathbf{x} = \mathcal{D}\mathbf{x}' = \mathcal{B}U\mathbf{x}',$$

και παίρνουμε ότι

$$\boxed{\mathbf{x} = U\mathbf{x}'} \Longleftrightarrow \boxed{\mathbf{x}' = U^{-1}\mathbf{x}}$$

Συμπέρασμα: Εάν ο πίνακας αλλαγής βάσης από αρχική σε τελική βάση είναι ο U, τότε ο πίνακας αλλαγής μεταβλητών από αρχικές σε τελικές μεταβλητές είναι ο *αντίστροφός* του U^{-1}.

Παρατήρηση: Η αλλαγή μεταβλητών υπολογίζεται εύκολα και χωρίς τον βολικό μας συμβολισμό, ως εξής:

$$v = \sum_i x_i b_i = \sum_j x'_j d_j = \sum_j x'_j \left(\sum_i u_{ij} b_i \right) = \sum_i \left(\sum_j u_{ij} x'_j \right) b_i$$

και, συγκρίνοντας, έχουμε ότι $x_i = \sum_j u_{ij} x'_j$ ή, σε μορφή πινάκων, ακριβώς την πρώτη σχέση στο παραπάνω κουτί.

[1] Τα οποία στο μυαλό μας τα θεωρούμε ως διανύσματα στήλης, οπότε ο $\mathcal{B}$ μοιάζει με τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα, χωρίς να είναι ακριβώς έτσι.

1.2 Γραμμικές απεικονίσεις

Στην κατηγορία των διανυσματικών χώρων, όπου έχουμε ως θεμελιώδη έννοια αυτή του γραμμικού συνδυασμού, είναι φυσικό να προσάψουμε μιά ειδική κατηγορία συναρτήσεων, αυτές που διατηρούν τους γραμμικούς συνδυασμούς! Έτσι απλά προκύπτει η έννοια της **γραμμικής απεικόνισης**, που δεν είναι τίποτα περισσότερο από μιά συνάρτηση T μεταξύ διανυσματικών χώρων,[2] $T : V \to W$ τέτοια ώστε

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Η υπόλοιπη θεωρία των γραμμικών απεικονίσεων (ΓΑ) έπεται άμεσα, σε συνδυασμό με τις έννοιες του προηγουμένου εδαφίου. Είναι για παράδειγμα προφανές ότι υποχώροι του V απεικονίζονται σε υποχώρους του W και αντίστροφες εικόνες υποχώρων του W δίνουν υποχώρους του V. Ο πυρήνας της T είναι ακριβώς η αντίστροφη εικόνα του τετριμμένου υποχώρου $\{\mathbf{0}\}$, οπότε είναι υποχώρος του V, που γράφουμε $\ker T$.

Συνεχίζοντας, εάν επιλέξουμε βάση $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ του V^n και βάση $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ του W^m, η εικόνα κάθε διανύσματος βάσης του V εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης $\mathcal{F}$:

$$T(b_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j. \tag{1.2}$$

(δώστε προσοχή στην σειρά των δεικτών που φαίνεται ανάποδη, αλλά θα αποδειχθεί κατάλληλη αμέσως μετά.) Οι mn αριθμοί a_{ji} ορίζουν έναν $m \times n$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ο οποίος εκφράζει την ΓΑ T ως προς τις δοθείσες βάσεις. Αλλαγή βάσης στον V ή τον W οδηγεί σε διαφορετικό πίνακα (οπότε θα ήταν πιο σωστό να γράψουμε $A(\mathcal{B}, \mathcal{F})$.)

Το γενικό διάνυσμα $v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in V$ απεικονίζεται, από τη γραμμική ιδιότητα, στο $T(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(b_i) \in W$, το οποίο δίνει

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right) f_j = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j,$$

με τους συντελεστές y_j να δίνουν διάνυσμα $\mathbf{y}$ το οποίο είναι ακριβώς το γινόμενο του πίνακα A με το διάνυσμα $\mathbf{x}$: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$! (εξηγώντας έτσι και την επιλογή δεικτών στην 1.2).

[2] Ορισμένων πάνω από το ίδιο σώμα k.

Παρατήρηση 1.1. Είναι σαφές ότι κάθε στήλη του πίνακα A δίνει τις συντεταγμένες της εικόνας του αντίστοιχου διανύσματος βάσης του V ως προς τη βάση του W.

Με επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας, βλέπουμε επίσης ότι, αν έχουμε ΓΑ

$$T : U^d \to V^n, \quad S : V^n \to W^m,$$

με επιλεγμένες βάσεις, τότε η σύνθεσή τους είναι ΓΑ με πίνακα BA, όπου ο A εκφράζει την T και ο B την S. Έτσι δικαιολογείται απόλυτα και ο ορισμός γινομένου πινάκων.

Άσκηση 1.1. Θεωρήστε αλλαγές βάσεων $\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}'$ και $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F}'$ στους χώρους V^n και W^m αντίστοιχα. Εάν ο πίνακας της ΓΑ $T : V \to W$ ως προς $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$ είναι ο A, βρείτε έκφραση για τον πίνακα της T ως προς $\mathcal{B}'$, $\mathcal{F}'$.

1.3 Ορίζουσες

Η ορίζουσα είναι βαθμωτή συνάρτηση στο σύνολο τετραγωνικών πινάκων κάποιας διάστασης. Οι ιδιότητές της είναι ενδιαφέρουσες, αλλά συνήθως δίνονται χωρίς την γεωμετρική τους ερμηνεία και ως αποτέλεσμα παραμένουν λίγο μυστήριες. Εδώ, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε στην ορίζουσα το γεωμετρικό της περιεχόμενο, διαλύοντας ίσως αυτή την αίσθηση μυστηρίου. Παρ' όλα αυτά, η παρουσίαση θα είναι πολύ σύντομη.

Για 2×2 πίνακες, η ορίζουσα είναι, όπως είναι γνωστό,

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc, \quad \text{γράφουμε και } \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Εάν ευθυγραμμίσουμε τους άξονες στο επίπεδο, έτσι ώστε το διάνυσμα της πρώτης στήλης να είναι οριζόντιο, δηλαδή υποθέτουμε ότι $c = 0$, τότε βλέπουμε εύκολα ότι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας, $|ad|$ δίνει το *εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν οι δύο στήλες* (βάση επί ύψος). Σαν άσκηση, μπορείτε να δείξετε ότι αυτό ισχύει και στη γενική περίπτωση. Εάν τα διανύσματα είναι συνευθειακά ή αν το ένα από τα δύο είναι μηδενικό, η ορίζουσα μηδενίζεται. Επομένως μη-μηδενική ορίζουσα και γραμμική ανεξαρτησία των στηλών είναι ισοδύναμες έννοιες.

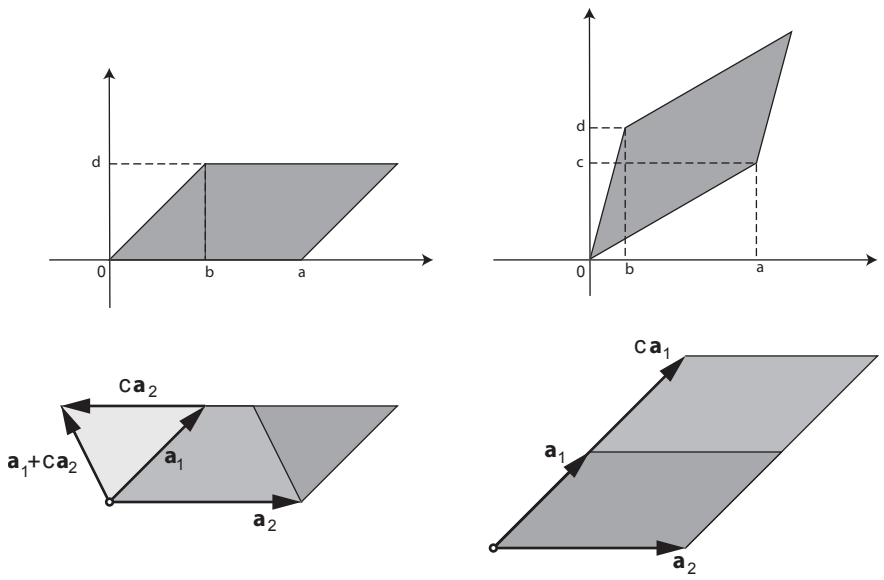
Το πρόσημο της $\det$ εξαρτάται από την *διάταξη* των διανυσμάτων (αλλάζει αν αλλάξουμε τη σειρά τους) και, καθώς η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 > 0,$$

οι μη-ιδιάζοντες πίνακες χωρίζονται σε δύο υποσύνολα: αυτό των πινάκων με *θετική* ορίζουσα και αυτό με *αρνητική*. Συγκρίνοντας με τον μοναδιαίο πίνακα, του οποίου οι στήλες αναγνωρίζονται ως τα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ της κανονικής βάσης, χωρίζουμε το σύνολο των βάσεων σε δύο κατηγορίες: αυτές που έχουν

τον ίδιο **προσανατολισμό** με την κανονική βάση (εννοούμε ότι η ορίζουσα είναι θετική) και αυτές με αντίθετο προσανατολισμό.

Από τη στοιχειώδη γεωμετρία στο επίπεδο βλέπουμε επίσης ότι το εμβαδόν δεν μεταβάλλεται εάν στην μία στήλη προσθέσουμε πολλαπλάσιο της άλλης και ότι αν πολλαπλασιάσουμε μία στήλη με αριθμό c, τότε και η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με c (Σχήμα 1.1).



Σχήμα 1.1: Ορίζουσα και εμβαδόν.

Περνάμε στους 3×3 πίνακες. Έχουμε

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad (1.3)$$

αρκετά περίπλοκους και μυστηριώδεις τύπους. Ο πρώτος τύπος δίνεται συνήθως με τον *κανόνα των διαγωνίων τριάδων* (Sarrus), με πρόσημο ανάλογα με την κατεύθυνση της διαγωνίου. Ο σωστός τρόπος γενίκευσής του είναι να παρατηρήσουμε ότι κάθε τριάδα αποτελεί επιλογή για κάθε δείκτη σειράς i ενός δείκτη στήλης $\sigma(i)$ έτσι ώστε να επιλέγεται κάθε στήλη μία φορά. Παρατηρήστε ότι γράψαμε έτσι τις τριάδες, ώστε ο πρώτος δείκτης να είναι το 1,2 και 3 αντίστοιχα. Ο δεύτερος δείκτης διαβάζεται ως *μετάθεση* (permutation) του $(1, 2, 3)$. Έτσι βλέπουμε ότι οι όροι με θετικό πρόσημο αντιστοιχούν σε κυκλικές μεταθέσεις του $(1, 2, 3)$, ενώ αυτοί με αρνητικό σε μεταθέσεις που είναι *εναλλαγή* (transposition) δύο στοιχείων.

Για γενική διάσταση, λοιπόν, έχουμε τον τύπο

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

όπου γράψαμε S_n για την ομάδα των μεταθέσεων του $(1, 2, \dots, n)$ και $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{|\sigma|}$, ανάλογα με το αν η μετάθεση είναι περιττή ή άρτια (όπου $|\sigma|$ ορίζεται από τον αριθμό των *εναλλαγών* που δίνει τη μετάθεση).

Στον δεύτερο τύπο έχουμε ¨ανάπτυγμα της πρώτης σειράς¨ και εύκολα παίρνουμε επαγωγικό ορισμό για γενική διάσταση n (ποιόν;)

Η γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας σε τρεις διαστάσεις είναι ακριβώς ανάλογη αυτής στο επίπεδο: *η ορίζουσα δίνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα τρία διανύσματα και το πρόσημο εξαρτάται από τη διάταξη των στηλών.* Εάν η τιμή της ορίζουσας είναι μη-μηδενική (ο πίνακας είναι μη-ιδιάζων), τότε οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και αντίστροφα. Για μη-ιδιάζοντες πινακες, η ορίζουσα θα είναι *θετική* εάν η βάση που προκύπτει από τις στήλες του A είναι ¨δεξιόστροφη¨ (προτιμούμε να λέμε ότι έχει τον ίδιο προσανατολισμό με την κανονική βάση του $\mathbf{R}^3$) και *αρνητική* εάν έχει αντίθετο προσανατολισμό (είναι ¨αριστερόστροφη¨).

Οι βασικές ιδιότητες της ορίζουσας έχουν και πάλι απλό γεωμετρικό περιεχόμενο: κλιμάκωση μιάς στήλης κλιμακώνει τον όγκο, πρόσθεση πολλαπλασίου άλλης στήλης δεν αλλάζει τον όγκο κ.ο.κ.

Η ορίζουσα δίνει άμεσα *κριτήριο γραμμικής ανεξαρτησίας* για n διανύσματα του V^n: $\det A = 0$ σημαίνει γραμμική εξάρτηση των στηλών και $\det A \neq 0$ γραμμική ανεξαρτησία τους.

Για m διανύσματα $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ του V^n, η γραμμική ανεξαρτησία τους μπορεί πάλι να ελεγχθεί μέσω της ορίζουσας: αρκεί να βρούμε $m \times m$ υποπινακα του $n \times m$ πίνακα $[v_1\ v_2 \cdots\ v_m]$ με μη-μηδενική ορίζουσα *(Άσκηση: δείξτε το αυτό).*

Από υπολογιστική σκοπιά, φυσικά, πολλά από τα παραπάνω γίνονται ευκολότερα μέσω της απαλοιφής Gauss. Η θεωρητική σημασία της ορίζουσας και το γεωμετρικό της περιεχόμενο παραμένουν πάντως πολύ σημαντικά.

1.4 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Η γενική μορφή συστήματος m γραμμικών εξισώσεων (ΣΓΕ) σε n αγνώστους είναι

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \tag{1.4}$$

Το ΓΣΕ σε μορφή πινάκων είναι απλά: $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in k^n$, $\mathbf{y} \in k^m$. Ισοδύναμα, έχουμε την εξής χρήσιμη, γεωμετρικά, ερμηνεία: θεωρούμε τις στήλες του A,

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ ως διανύσματα του k^m. Το ΣΓΕ είναι τότε

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{y}.$$

Αυτό σημαίνει ότι *ψάχνουμε γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων στήλης ο οποίος να παράγει το δοθέν διάνυσμα* $\mathbf{y}$ *του* k^m. Η συμπαγής μορφή $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ δίνει το ίδιο, αν ερμηνεύσουμε τον πίνακα A ως τον πίνακα γραμμικής απεικόνισης $T : V^n \to W^m$ ως προς επιλεγμένες βάσεις (όχι απαραίτητα τις κανονικές!) Θυμίζουμε ότι οι στήλες του A είναι οι εικόνες των διανυσμάτων βάσης του V^n.

Από τα παραπάνω, έχουμε διαθέσιμο το κριτήριο ύπαρξης λύσης του ΣΓΕ: *υπάρχει λύση εάν και μόνον εάν το διάνυσμα* $\mathbf{y}$ *ανήκει στον υποχώρο-εικόνα* $\operatorname{im} T$ *της* T *(ή του* A*).* Η συνθήκη αυτή ύπαρξης δεν κάνει αναφορά στις διαστάσεις n και m. Θεωρητικά, μπορεί να έχουμε λύση ακόμα και αν έχουμε μεγαλύτερο αριθμό εξισώσεων από αγνώστους ($m > n$) και να μην υπάρχει λύση ενώ έχουμε λιγότερες εξισώσεις από αγνώστους ($m < n$).

Σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε τον πυρήνα της T, ή του A, και παρατηρούμε ότι αν $\mathbf{x}_0 \in \ker A$ και $\mathbf{x}$ είναι κάποια λύση, τότε το άθροισμα $\mathbf{x} + c\mathbf{x}_0$, $c \in k$ δίνει λύση, καθώς

$$A(\mathbf{x} + c\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x} + cA\mathbf{x}_0 = \mathbf{y} + c\mathbf{0} = \mathbf{y}.$$

Έτσι, φτάνουμε στο τελικό συμπέρασμα για την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων του ΓΣΕ 1.4:

Θεώρημα 1.6. *Το ΣΓΕ 1.4 έχει λύση εάν και μόνον εάν* $\mathbf{y} \in \operatorname{im} A$ *και το σύνολο όλων των λύσεων είναι τότε το* $\mathbf{x} + \ker A$*, όπου* $\mathbf{x}$ *είναι μία οποιαδήποτε (ειδική) λύση του.*

Καθώς ο πυρήνας είναι υποχώρος του k^n, το σύνολο λύσεων είναι μετατόπιση του υποχώρου $\ker A$ κατά το διάνυσμα $\mathbf{x}$. Τέτοια υποσύνολα λέγονται *αφινικοί υποχώροι* και αποτελούν το αντικείμενο μελέτης του επόμενου κεφαλαίου.

Στο σημείο αυτό, καλό είναι να αναλυθεί από τον αναγνώστη μιά σειρά ασκήσεων στα ΓΣΕ για διάφορες επιλογές διαστάσεων, για να αφομειωθεί το θεμελιώδες αυτο αποτέλεσμα *(δες Ασκήσεις).* Εδώ, ας περιοριστούμε σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1. Θεωρούνε το σύστημα δύο εξισώσεων σε τρεις αγνώστους:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ 2x - y + 3z &= 5 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Λογικά, καθώς έχουμε $3 - 2 = 1$ βαθμό ελευθερίας, αναμένουμε ότι οι λύσεις θα περιλαμβάνουν μιά ελεύθερη μεταβλητή. Με τον παραδοσιακό (και μη-συστηματικό τρόπο) προχωρούμε επιλέγοντας μία από τις μεταβλητές ως

ελεύθερη, ας πούμε το z. Έχουμε λοιπόν το σύστημα δύο εξισώσεων σε δύο αγνώστους

$$\begin{aligned} x + y &= 10 - z \\ 2x - y &= 5 - 3z, \end{aligned}$$

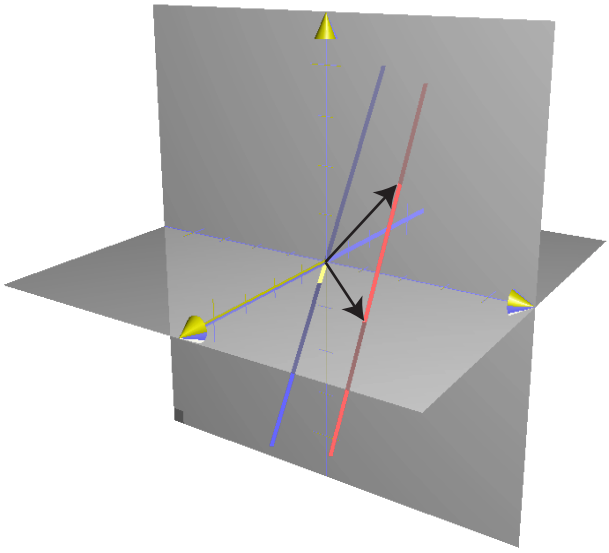
το οποίο έχει λύσεις:

$$3x = 15 - 4z \Rightarrow x = 5 - \frac{4}{3}z, \quad y = 10 - z - x = 5 + \frac{1}{3}z.$$

Γράφουμε το σύνολο των λύσεων που βρήκαμε:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - (4/3)z \\ 5 - (1/3)z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

το οποίο αναγνωρίζουμε ως εξίσωση ευθείας στο χώρο. Είμαστε ευχαριστημένοι, καθώς το σύνολο αυτό έχει τη δομή που θέλαμε: ειδική λύση σύν υποχώρο που πρέπει να είναι ο πυρήνας του A.



Σχήμα 1.2: Σύνολο λύσεων του ΓΣΕ 1.1 (κόκκινο) και πυρήνας (μπλε). Οι δύο ειδικές λύσεις με μαύρα βέλη.

Τί θα βρίσκαμε άραγε αν αντί του z επιλέγαμε το x ως ελεύθερη μεταβλητή; Θα είχαμε

$$\begin{aligned} y + z &= 10 - x \\ -y + 3z &= 5 - 2x, \end{aligned}$$

οπότε

$$4z = 15 - 3x \Rightarrow z = \frac{15}{4} - \frac{3}{4}x, \quad y = 10 - x - 2 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}x.$$

Το σύνολο των λύσεων είναι τώρα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ (25/4) - (1/4)x \\ (15/4) - (3/4)x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25/4 \\ 15/4 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ -1/4 \\ -3/4 \end{bmatrix},$$

το οποίο δεν φαίνεται να έχει πολλή σχέση με το προηγούμενο. Τί συμβαίνει; Το θέμα του πυρήνα ξεκαθαρίζεται εύκολα, αν προσέξουμε ότι

$$\left(-\frac{4}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1/4 \\ -3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Είχαμε δηλαδή απλά δύο διαφορετικά διανύσματα ως βάση του μονοδιάστατου υποχώρου $\ker A$, και είδαμε ότι είναι πράγματι συνευθειακά.

Για να ολοκληρώσουμε την επαλήθευση ότι τα δύο σύνολα είναι πράγματι τα ίδια, θα πρέπει η διαφορά των ειδικών λύσεων να ανήκει στον πυρήνα. Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 25/4 \\ 15/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -(5/4) \\ -(15/4) \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ -1/4 \\ -3/4 \end{bmatrix} \in \ker A.$$

Μία πιο συστηματική μέθοδος εύρεσης λύσεων του ΣΓΕ είναι να βρούμε πρώτα τον πυρήνα και κατόπιν μιά οποιαδήποτε λύση (όσο πιό απλή γίνεται). Εδώ, για παράδειγμα, ο πυρήνας είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

που αντιστοιχεί στο 1.5. Καλό είναι να χρησιμοποιείται σταθερά c αντί του ονόματος μεταβλητής (x, z κλπ). Βρίσκουμε, θέτοντας $z = c$ για παράδειγμα,

$$\ker A = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Μιά απλή ειδική λύση βρίσκεται θέτοντας $z = 0$, οπότε $x = 5$ και $y = 5$ (όπως και πριν).

Τέλος, και η απαλοιφή Gauss δίνει ακριβώς ίδιο αποτέλεσμα, καθώς σε ένα κιόλας βήμα έχουμε

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 1 & -15 \end{array},$$

που δίνει την εξίσωση $-3y + z = 15$ όπως και πριν (βέβαια έχουμε χάσει κάθε γεωμετρική ερμηνεία, λόγος που όσο αποτελεσματική και να είναι η μέθοδος αυτή, από θεωρητική σκοπιά δεν προσφέρει τίποτα.)

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα της μελέτης της δομής του συνόλου λύσεων ΓΣΕ :

- Το σύνολο λύσεων, εφόσον δεν είναι κενό, έχει τη δομή $\mathbf{x}_p + \ker A$, με $\mathbf{x}_p$ ειδική λύση και $\ker A$ τον πυρήνα του A. Γεωμετρικά, είναι παράλληλη μετατόπιση του υποχώρου $\ker A$.

- Εάν $\ker A \neq \{\mathbf{0}\}$, η ειδική λύση δεν είναι μοναδικά ορισμένη. Μάλιστα, αν $\mathbf{x}_p$ και $\mathbf{x}'_p$ είναι λύσεις, η διαφορά τους είναι διάνυσμα του πυρήνα.

- Δεν υπάρχει επομένως φυσικός τρόπος επιλογής ειδικής λύσης.

1.5 Εξισώσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο

Ας οργανώσουμε τους τρόπους που δίνονται ευθείες και επίπεδα στο χώρο, εν είδει προεπισκόπησης κάποιων εννοιών που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο για γενικούς αφινικούς χώρους, και υποχώρους. Δουλεύουμε στον πραγματικό χώρο $\mathbf{R}^3$.

Αρχίζουμε από το σημείο αυτό να διαφοροποιούμε τις έννοιες *¨σημείο¨* και *¨διάνυσμα¨*. Προς το παρόν, αυτό δεν θα είναι καλά δικαιολογημένο, καθώς και τα δύο είναι στοιχεία του ίδιου διανυσματικού χώρου, αλλά αξίζει να κρατήσει ο αναγνώστης τη διάκριση αυτή κατά νου, καθώς σύντομα θα διαχωρίσουμε ¨σύνολο σημείων¨ από τον διανυσματικό χώρο. Θα γράφουμε με έντονη γραμματοσειρά τα διανύσματα και στα σχήματα, τα σημεία θα σημειώνονται με τελείες και τα διανύσματα με τα γνωστά βέλη.

1.5.1 Ευθείες

Στο χώρο $\mathbf{R}^3$ δίνεται σημείο x_0 και διάνυσμα $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Η παραμετρική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο x_0 και είναι στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}$ είναι

$$\ell(x_0, \mathbf{v}) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = x_0 + t\mathbf{v},\ t \in \mathbf{R}\}.$$

(Ο παρατηρητικός αναγνώστης θα φέρει την ένσταση ότι προσθέσαμε διάνυσμα σε σημείο, αντικείμενα που ισχυριστήκαμε ότι διαχωρίζουμε. Δεκτή η ένσταση, αλλά υπομονή : σύντομα θα ξεκαθαρίσουμε ότι έχουμε άλλου είδους πρόσθεση, που επιτρέπει κάτι τέτοιο !)

Όπως είδαμε, το σημείο x_0 μπορεί να αντικατασταθεί από άλλο σημείο της ευθείας, δηλαδή με $x'_0 = x_0 + c\mathbf{v}$, για κάποια τιμή της σταθεράς c, χωρίς να αλλάξει το σύνολο που ορίζεται.

Πιό φυσικός είναι ίσως ο ορισμός ευθείας μέσω δύο διακριτών σημείων της, $x_0 \neq x_1$, όπως γίνεται στη στοιχειώδη, σχολική Γεωμετρία. Ορίζοντας

διάνυσμα $\mathbf{v} = x_1 - x_0$, παίρνουμε τον αρχικό μας ορισμό:[3]

$$\ell(x_0, x_1) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = x_0 + t(x_1 - x_0),\ t \in \mathbf{R}\}.$$

Τώρα μπορούμε να φέρουμε τον ορισμό της ευθείας σε πιό *συμμετρική* μορφή (δίνοντας ίσους ρόλους στα δύο σημεία), παρατηρώντας ότι

$$x_0 + t(x_1 - x_0) = (1 - t)x_0 + tx_1 = \alpha x_0 + \beta x_1, \quad \text{με } \alpha + \beta = 1.$$

Έτσι, έχουμε τη συμμετρική μορφή ευθείας που ορίζεται από δύο σημεία $x_0 \neq x_1$:

$$\ell(x_0, x_1) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = \alpha x_0 + \beta x_1,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \alpha + \beta = 1\}.$$

1.5.2 Επίπεδα

Στο χώρο, δίνεται σημείο x_0 και δύο μη-συνευθειακά, μη-μηδενικά (δηλαδή γραμμικά ανεξάρτητα) διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Η παραμετρική εξίσωση του επιπέδου που περνά από το σημείο x_0 και προχωρά στις κατευθύνσεις των δύο διανυσμάτων είναι:

$$\mathcal{P}(x_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = x_0 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2,\ s, t \in \mathbf{R}\}.$$

Εναλλακτικά, ορίζουμε επίπεδο μέσω τριών μη-συνευθειακών σημείων της: δίνονται τρία μη-συνευθειακά σημεία x_0, x_1, x_2 (πώς το ελέγχουμε αυτό;) Ορίζουμε δύο διανύσματα, επιλέγοντας για παράδειγμα τις διαφορές

$$\mathbf{v}_1 = x_1 - x_0, \quad \mathbf{v}_2 = x_2 - x_0.$$

(Πάλι αφαίρεση σημείων να δίνει διάνυσμα, δυσανασχετεί ο αναγνώστης!) Τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;) Έχουμε έτσι το επίπεδο

$$\mathcal{P}(x_0, x_1, x_2) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = x_0 + s(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0),\ s, t \in \mathbf{R}\}.$$

Όπως κάναμε για ευθείες , θέλουμε να φέρουμε τον ορισμό σε πιό συμμετρική μορφή. Παρατηρούμε λοιπόν ότι

$$x_0 + s(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0) = (1 - s - t)x_0 + sx_1 + tx_2.$$

Έχουμε τώρα τρεις συντελεστές, που το άθροισμά τους είναι ίσο με μονάδα:

$$\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2, \quad \text{με } \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Αυτό δίνει την τελική, συμμετρική μορφή

$$\mathcal{P}(x_0, x_1, x_2) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R},\ \alpha + \beta + \gamma = 1\}.$$

[3] Και άλλη ένσταση από την αναγνώστρια: γιατί επιτρέψαμε αφαίρεση σημείων, που να δίνει αποτέλεσμα που είναι διάνυσμα; Δεκτή κι αυτή η ένσταση.

1.5.3 Αφινικοί συνδυασμοί

Έχοντας χειριστεί έννοιες σημείων, διανυσμάτων, πρόσθεσης και αφαίρεσης με τρόπο που δεν φαίνεται εκ πρώτης όψεως πολύ αυστηρός από μαθηματική σκοπιά, οφείλουμε τουλάχιστον να αναγνωρισουμε ένα νέο τύπο συνδυασμών, που αφορά αυτά που ονομάσαμε ¨σημεία¨. Πρόκειται για συνδυασμούς με συντελεστές που δεν είναι ελεύθεροι, αλλά περιορίζονται στο να έχουν άθροισμα ένα. Ιδού ο ορισμός:

Ορισμός 1.2. Εάν $x_0, x_1, \ldots, x_m$ είναι σημεία του χώρου V, **αφινικός συνδυασμός** τους λέγεται άθροισμα

$$t_0x_0 + t_1x_1 + \ldots + t_nx_n,$$

με το άθροισμα των συντελεστών $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1$.

Η σύγκριση με τους **γραμμικούς συνδυασμούς** διανυσμάτων

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m,$$

όπου οι συντελεστές $\alpha_i \in \mathbf{R}$ είναι ¨ελεύθεροι¨ δείχνει πόσο έχουμε περιορίσει την έννοια του συνδυασμού. Προφανώς, αφινικός συνδυασμός είναι και γραμμικός, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Μάλιστα, ενώ το $\mathbf{0}$ πάντοτε προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων, δεν είναι καθόλου απαραίτητο να προκύπτει ως αφινικός συνδυασμός (σκεφτείτε την περίπτωση ευθείας που δεν περνά από την αρχή των αξόνων και τον τελικό μας ορισμό ευθείας.)

Είδαμε μόλις ότι *το σύνολο όλων των αφινικών συνδυασμών δύο διακριτών σημείαων είναι ευθεία, ενώ το σύνολο όλων των αφινικών συνδυασμών τριών μη-συνευθειακών σημείων είναι επίπεδο στο χώρο.* Στο επόμενο Κεφάλαιο, θα εξηγήσουμε πώς η έννοια του αφινικού χώρου γενικεύει τις περιπτώσεις αυτές.

1.6 Ασκήσεις

[Στο ΔΧ. $\mathbf{R}^n$ θεωρούμε γνωστή την κανονική βάση $\mathcal{E}_n = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, με κάθε $\mathbf{e}_i$ να έχει μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο το 1 στη θέση i.]

1. (α΄) Ποιά είναι η σχέση μεταξύ $\mathrm{span}(u_1, u_2)$ και $\mathrm{span}(u_1 - u_2, u_2)$, όπου u_1, u_2 είναι μη-μηδενικά, μη-συνευθειακά διανύσματα διανυσματικού χώρου V^n.

   (β΄) Συγκρίνετε τα $\mathrm{span}(u_1, u_2, u_3)$ και $\mathrm{span}(u_1 + u_2 + u_3, u_2 + u_3, u_3)$ για γενικά διανύσματα $u_1, u_2, u_3 \in V^n$.

2. (α΄) Δείξτε ότι η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

   είναι $\det A = (a - c)(b - a)(b - c)$.

(β') Βασιζόμενοι στο παραπάνω, βρείτε δέκα διανύσματα στο χώρο $\mathbf{R}^3$ τέτοια ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(γ') Δώστε μία τέτοια τριάδα που να δίνει *όγκο* του παραλληλεπιπέδου που ορίζει ίσο με μονάδα.

3. Δώστε την ορίζουσα γενικού 4×4 πίνακα και δείξτε ότι προσπάθεια χρήσης του *κανόνα των διαγωνίων*(*) δεν δίνει όλους τους όρους της $\det A$ και επομένως δεν ισχύει.

   (*) ή κανόνα του Sarrus, δηλαδή οι διαγώνιοι με θετικό πρόσημο και οι αντίθετες διαγώνιοι με αρνητικό (βλ. εξίσωση 1.3).

4. Δίνονται υποχώροι του $\mathbf{R}^3$:

$$W_1 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right), \quad W_2 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

   (α') Να βρεθεί η τομή των δύο **υποχώρων**, $W_1 \cap W_2$.

   (β') Να βρεθεί η τομή των **επιπέδων** $2\mathbf{e}_1 + W_1$ και $\mathbf{e}_3 + W_2$.

5. Δώστε το σύνολο των λύσεων καθενός από τα παρακάτω γραμμικά συστήματα $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ και ερμηνεύστε το γεωμετρικά (εφόσον είναι μη-κενό.)

$$(a) \begin{bmatrix} -7 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} -3 & 4 & 11 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ k \\ 7 \end{bmatrix}, \text{ για διάφορες τιμές της σταθεράς } k.$$

   Δώστε επίσης και την εικόνα της γραμμικής απεικόνισης που εκφράζει κάθε πίνακας A, υποθέτοντας ότι πήραμε κανονικές βάσεις παντού. Περιγράψτε τί θα συμβεί εάν *διαταράξουμε* ένα από τα στοιχεία του πίνακα A στο δεύτερο σύστημα (δηλ. αν προσθέσουμε μικρό ϵ).

6. (α') Δείξτε ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   στον χώρο $\mathbf{R}^4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(β΄) Βρείτε τέταρτο διάνυσμα $\mathbf{v}_4$ ώστε να έχουμε βάση του $\mathbf{R}^4$.

7. Επιλέγουμε βάσεις

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

των Δ.Χ. $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$ αντίστοιχα. Μία γραμμική απεικόνιση $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ έχει πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{F}$.

(α΄) Δώστε τον πίνακα της T ως προς τις συνήθεις βάσεις $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2$.

(β΄) Βρείτε την εικόνα του διανύσματος

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Κεφάλαιο 2

Αφινική Γεωμετρία

2.1 Ορισμός και απλά παραδείγματα

Η κλασική Γεωμετρία την οποία μαθαίνουμε στο σχολείο, βασισμένη στον Ευκλείδη, δεν αναφέρεται σε διανύσματα, συντεταγμένες και άλλες έννοιες της σύγχρονής Αναλυτικής Γεωμετρίας (ο όρος που χρησιμοποιείται για τη παραδοσιακή αυτή γεωμετρία είναι *Συνθετική Γεωμετρία*.) Θεωρεί βασικές έννοιες όπως σημείο, ευθεία, παραλληλία, τομή ευθειών και ούτω καθεξής. Κατά κανόνα, γίνεται στο επίπεδο ή στον τριδιάστατο χώρο, καθώς στις μικρές αυτές διαστάσεις μόνο είναι δυνατή η άμεση γεωμετρική θεώρηση προβλημάτων.

Στην Αναλυτική Γεωμετρία, και στη Γραμμική Άλγεβρα (αντικείμενα με σημαντικό ποσοστό επικάλυψης), στο επίπεδο και τον χώρο δίνεται η δομή *διανυσματικού χώρου* δύο και τριών διαστάσεων αντίστοιχα. Όπως παρατηρήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αυτό αναθέτει ιδιαίτερο ρόλο στο μηδενικό διάνυσμα. Η *Αφινική ή Ομοπαραλληλική Γεωμετρία* είναι μιά απόπειρα να διατηρήσουμε τον αναλυτικό χαρακτήρα της γεωμετρίας, αλλά παρακάμπτοντας την επιλογή αφετηρίας, που ούτως ή άλλως είναι κάτι τεχνητό.

Η παραπάνω απλή εξήγηση αρκεί προς το παρόν ως κίνητρο για τον ορισμό που ακολουθεί.[1]

Ορισμός 2.1. Εάν V^n είναι διανυσματικός χώρος στο σώμα k διάστασης n και X σύνολο, **δράση** (action) του V στο X ονομάζουμε απεικόνιση

$$\phi : X \times V \to X,\ (x, \mathbf{v}) \mapsto \phi(x, \mathbf{v}),$$

τέτοια ώστε $\phi(x, \mathbf{0}) = x$ για κάθε $x \in X$ και

$$\phi(\phi(x, \mathbf{v}), \mathbf{w}) = \phi(x, \mathbf{w} + \mathbf{v}).$$

[1] Αλλά αδικεί σε μεγάλο βαθμό τη σημασία της Αφινικής Γεωμετρίας, η οποία παίρνει τις πραγματικές της διαστάσεις μόνο στο σημείο όπου ορίζουμε κατάλληλη ομάδα μετασχηματισμών αφινικών χώρων! Αυτό θα γίνει αργότερα στο κεφάλαιο αυτό.

Η τελευταία αυτή ιδιότητα είναι κρίσιμη και μας οδηγεί στην ερμηνεία της δράσης ως ένα είδος πρόσθεσης στα στοιχεία του συνόλου X διανυσμάτων από τον Δ.Χ. V. Για να ενθαρρύνουμε την ερμηνεία αυτή, θα γράψουμε το αποτέλεσμα της δράσης ως *γενικευμένη πρόσθεση* (ή μετατόπιση του σημείου κατά διάνυσμα), με το δικό της σύμβολο:

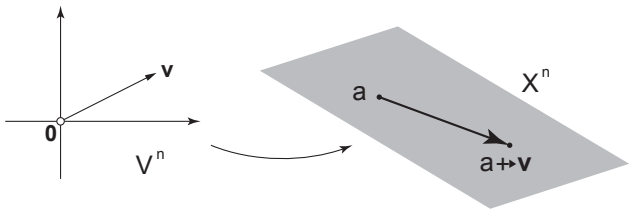
$$\phi(x, \mathbf{v}) = x \mathrel{+\!\!\!\!\rightarrow} \mathbf{v}.$$

Οι ιδιότητες του ορισμού γράφονται έτσι με πιό φυσικό τρόπο ως

$$x \mathrel{+\!\!\!\!\rightarrow} \mathbf{0} = x, \quad (x \mathrel{+\!\!\!\!\rightarrow} \mathbf{v}) \mathrel{+\!\!\!\!\rightarrow} \mathbf{w} = x \mathrel{+\!\!\!\!\rightarrow} (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Προσοχή! στην δεύτερη εξίσωση έχουμε δύο ειδών σύμβολα ¨σύν¨: το άθροισμα διανυσμάτων και την ¨πρόσθεση¨ διανύσματος σε στοιχείο του X.

Ορισμός 2.2. Αφινικός χώρος διάστασης n είναι ένα σύνολο X με μία δοθείσα δράση ενός διανυσματικού χώρου V^n στο X, που ονομάζουμε ¨πρόσθεση διανύσματος¨, τέτοια ώστε για κάθε επιλογή $a \in X$, η αντιστοίχιση $\mathbf{v} \to a \mathrel{+\!\!\!\!\rightarrow} \mathbf{v}$ από τον ΔΧ V στο σύνολο X να είναι 1:1 και επί (ο όρος bijection έχει επικρατήσει και θα τον προτιμούμε).



Σχήμα 2.1: Αφινικός χώρος X^n με δράση του διανυσματικού χώρου V^n.

Με άλλα λόγια, *επιλογή σημείου του X μετατρέπει το σύνολο X σε διανυσματικό χώρο.* Έτσι, δικαιολογείται πλήρως ο ισχυρισμός ότι οι αφινικοί χώροι είναι σαν τους διανυσματικούς, εκτός από την επιλογή αφετηρίας. Επίσης, διαχωρίσαμε επιτυχώς τις έννοιες **σημείων** (στοιχείων του X) και **διανυσμάτων** (στοιχείων του ΔΧ V). Χρειάζεται βέβαια προσοχή στο χειρισμό τους, και κάθε φορά που γράφουμε μιά μεικτή έκφραση, πρέπει να βεβαιωθούμε ότι είναι καλά ορισμένη.

Ας δώσουμε κάποια βασικά παραδείγματα

Παράδειγμα 2.1. Κάθε διανυσματικός χώρος V^n είναι και αφινικός χώρος, με την πρόσθεση διανυσμάτων ίδια με τη γενική πρόσθεση που ορίσαμε:

$$V^n \times V^n \to V^n : \ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

Εύλογη είναι η ερώτηση: σε τί βαθμό αυτό γενικεύει τον ορισμό του ΔΧ και σε τί ακριβώς διαφέρει; Η απάντηση είναι ότι τώρα θεωρούμε τυχαίο σημείο

του ΔΧ ως νέα αφετηρία και επικεντρώνουμε τα διανύσματα σε αυτήν. Αν $\mathbf{v}_0$ είναι η επιλογή αυτή, η αντιστοίχιση στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{v} \in V^n$ στο $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$. Πρόκειται δηλαδή για *μετατόπιση* της αφετηρίας (ή του κέντρου των αξόνων.)

Παράδειγμα 2.2. Η ευθεία που ορίζεται στο επίπεδο από την εξίσωση $x+2y = 1$ είναι αφινικός χώρος μίας διάστασης. Για να συνηθίσουμε τον ορισμό και να δούμε γιατί ακριβώς χρειάστηκε νέο σύμβολο, ας δώσουμε δράση του $\mathbf{R}^1$ στο σύνολο αυτό, δηλαδή στο

$$\ell = \{(x, y) \in \mathbf{R}^1 : x + 2y = 1\}.$$

Ας ορίσουμε λοιπόν:

$$\ell \times \mathbf{R}^1 \to \ell : ((x, y), u) \mapsto (x - 2u, y + u),$$

δηλαδή $(x, y) \mathbin{+\!\!\!\!\rightarrow} u = (x - 2u, y + u)$. Καθώς $x - 2u + 2(y + u) = x + 2y = 1$, έχουμε πράγματι σημείο του συνόλου ℓ εφόσον το $(x, y) \in \ell$.

Προσοχή: η επιλογή δράσης *δεν είναι μοναδική!* Θα μπορούσαμε να ορίσουμε δράση

$$\ell \times \mathbf{R}^1 \to \ell : ((x, y), u) \mapsto (x + 4u, y - 2u).$$

Συγκρίνοντας με την παραμετρική μορφή ευθείας που δώσαμε πριν, βλέπουμε ότι η προσέγγιση μέσω αφινικού χώρου είναι ουσιαστικά το ίδιο με το να γράψουμε την ευθεία ως

$$\ell(a_0, \mathbf{v}) = \{x_0 + t\mathbf{v},\ t \in \mathbf{R}^1\},$$

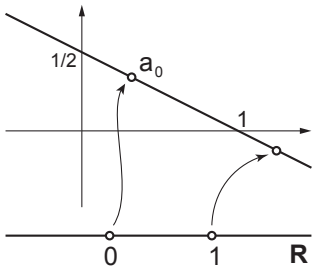
όπου $a_0 \in \ell$ και το $\mathbf{v}$ είναι διάνυσμα κατεύθυνσης της ευθείας. Στο Παράδειγμά μας, για $\mathbf{v}$ μπορούμε να επιλέξουμε το $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ή το $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, που αντιστοιχούν στις δύο επιλογές δράσης που μόλις δώσαμε!

Γεωμετρικά, λοιπόν, θα λέγαμε ότι επιλογή δράσης ορίζει τον τρόπο με τον οποίο η πραγματική ευθεία $\mathbf{R}^1$ "κολλάει" πάνω στο αφινικό χώρο $\ell \subset \mathbf{R}^2$: το μηδενικό στοιχείο $0 \in \mathbf{R}^1$ πηγαίνει σε επιλογή σημείου $a_0 = (x_0, y_0)$ της ℓ και το $1 \in \mathbf{R}^1$ στο σημείο $a_0 \mathbin{+\!\!\!\!\rightarrow} 1$. Τα υπόλοιπα σημεία έχουν την προφανή αντιστοίχιση (Σχήμα 2.2).

Επιστρέφουμε τώρα στον ορισμό αφινικού χώρου. Μιά κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι η τελευταία συνθήκη του ορισμού λέει ότι για a, b *οποιαδήποτε* σημεία του X, *υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα* $\mathbf{v}$ ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση $a \mathbin{+\!\!\!\!\rightarrow} \mathbf{v} = b$. Είναι δηλαδή σαν να ορίζουμε το $\mathbf{v}$ ως τη διαφορά των a και b: $\mathbf{v} = b - a$. Από την μοναδικότητα, έχουμε καλό ορισμό και έτσι οδηγούμαστε στον δεύτερο, εναλλακτικό ορισμό αφινικού χώρου:

Ορισμός 2.3 (Δεύτερος ορισμός Αφινικού Χώρου)**.** Το σύνολο X είναι **αφινικός χώρος** διάστασης n εάν ορίζεται απεικόνιση από το καρτεσιανό γινόμενο $X \times X$ σε διανυσματικό χώρο V^n

$$X \times X \to V^n,\ (a, b) \mapsto \overrightarrow{ab} \in V^n,$$



Σχήμα 2.2: Η δράση του $\mathbf{R}^1$ στην ευθεία ℓ, με αρχή το a_0: το 0 πηγαίνει στο σημείο a_0, το διάνυσμα 1 σε σημείο $a_0 \mapsto 1$ και όλα τα άλλα σε κατάλληλα κλιμακωμένα πολλαπλάσια του σημείου αυτού.

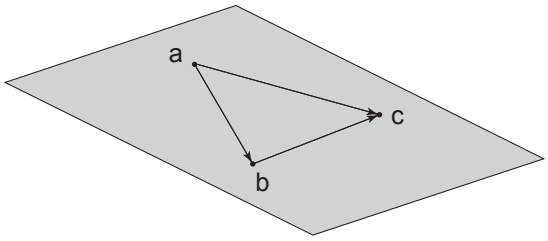
(με το διάνυσμα εικόνας να θεωρείται η **διαφορά** των σημείων a και b και να γράφεται $\overrightarrow{ab} = b - a$), τέτοια ώστε, αν $(a, b) \mapsto \overrightarrow{ab}$, $(b, c) \mapsto \overrightarrow{bc}$ και $(a, c) \mapsto \overrightarrow{ac}$ για a, b, c τρία σημεία του X, τότε τα τρία διανύσματα ικανοποιούν τη σχέση

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}.$$

Η σχέση αυτή λέγεται συχνά *ταυτότητα του Chasles*. Με χρήση του νέου ορισμού διαφοράς, λέει απλά ότι

$$c - a = (c - b) + (b - a)$$

με προφανές γεωμετρικό περιεχόμενο (Σχήμα 2.3).



Σχήμα 2.3: Η ταυτότητα του Chasles σε αφινικό χώρο.

Για να συνοψίσουμε λίγο αυτά που έχουμε ορίσει έως τώρα: διακρίναμε *σημεία* και *διανύσματα* και επιτρέψαμε δύο τρόπους να τα συνδέσουμε, με μετατόπιση σημείου από διάνυσμα $a \mapsto \mathbf{v}$ (πρώτος ορισμός) ή με διαφορά σημείων $b - a$ που δίνει διάνυσμα, το διάνυσμα ακριβώς που θα χρειαζόταν για να μας πάει από το πρώτο στο δεύτερο σημείο (δεύτερος ορισμός). Στα παραδείγματα είδαμε ότι πράγματι σημεία και διανύσματα είναι διαφορετικές έννοιες, συχνά διαφορετικής ¨διάστασης¨. Τέλος, χρειάζεται προσοχή στο χειρισμό των αντικειμένων αυτών: η έκφραση $(a - b) - c$ δεν έχει έννοια, αλλά η $a + (b - c)$ έχει, εφόσον το ¨συν¨ ερμηνευτεί με την έννοια του $\mapsto$ *(γιατί;)*

2.2 Υποχώροι, ανεξαρτησία και βάσεις

Είδαμε ότι σε αφινικό χώρο X^n όπου έχουμε επιλέξει κεντρικό σημείο a_0 (αφετηρία) όλα τα άλλα σημεία είναι σε 1:1 αντιστοίχιση με τα διανύσματα του ΔΧ V^n ο οποίος δρα στον X^n: $\mathbf{v} \mapsto a_0 \nrightarrow \mathbf{v}$. Αν επιλέξουμε βάση

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$$

του ΔΧ αυτού, τότε τα σημεία του X^n είναι τα

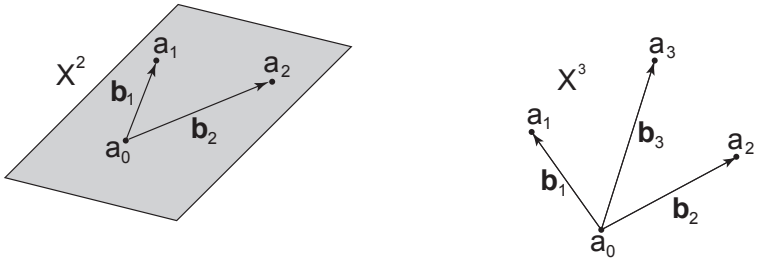
$$a = a_0 \nrightarrow \mathbf{v} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{b}_i,$$

όπου x_i είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{v}$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Ας *ορίσουμε* τώρα n σημεία $a_i = a_0 \nrightarrow \mathbf{b}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Εναλλακτικά, έχουμε ότι τα διανύσματα βάσης είναι οι διαφορές των a_i με το αρχικό σημείο a_0: $\mathbf{b}_i = a_i - a_0$ (Σχήμα 2.4). Έτσι, έχουμε

$$a = a_0 \nrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i (a_i - a_0).$$

Στο σημείο αυτό, εάν επιτρέψουμε την ομαδοποίηση συντελεστών για κάθε



Σχήμα 2.4: Ορισμός $n+1$ σημείων με μετατοπίσεις του κεντρικού σημείου a_0 με τα n διανύσματα βάσης του ΔΧ (παραδείγματα σε 2 και 3 διαστάσεις).

σημείο[2]

$$a = (1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n)a_0 + x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n,$$

και παρατηρούμε ότι έχουμε αυτό ακριβώς που είχαμε ορίσει ως **αφινικό συνδυασμό σημείων**, καθώς το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με ένα!

Τα $(n+1)$ σημεία $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ του ΑΧ X^n είναι ¨προνομιούχα¨, με την έννοια ότι οι n διαφορές τους με το κεντρικό σημείο a_0 δίνουν βάση του ΔΧ V^n. Όπως θα δούμε σύντομα, τα σημεία αυτά δίνουν *αφινικής βάσης* του χώρου X^n.

[2]Κάτι που θα επιτρέψουμε, αλλά πάντα με την παραδοχή ότι είναι ισοδύναμο με τον προηγούμενο τύπο, ο οποίος δικαιολογείται πλήρως από τον ορισμό.

Αφινικοί συνδυασμοί: Τώρα που έχουμε δει πώς να περνάμε από το αφινικό άθροισμα $+\!\!\rightarrow$ σημείου με διάνυσμα σε αφινικό συνδυασμό *σημείων μόνο,* δεν χρειάζεται να περιοριστούμε σε αφινικούς συνδυασμούς που προκύπτουν από την παραπάνω ανάλυση: εάν έχουμε m σημεία $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ του χώρου X^n, κάθε επιλογή συντελεστών $t_1, \ldots, t_m$ με $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ δίνει[3] **αφινικό συνδυασμό**

$$t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_m a_m.$$

Ισχυριζόμαστε ότι αυτό δίνει σημείο του χώρου X^n. Καθώς $t_1 = 1 - \sum_{i=2}^m t_i$, και με την επιλογή ενός σημείου, ας πούμε του a_1, να παίζει το ρόλο της αρχής, έχουμε

$$a = a_1 + t_2(a_2 - a_1) + \ldots + t_m(a_m - a_1),$$

το οποίο μπορούμε να ερμηνεύσουμε ως αφινικό άθροισμα του *σημείου* a_0 με το *διάνυσμα* $\sum_{i=2}^m t_i(a_i - a_1)$. Αυτό το τελευταίο είναι διάνυσμα καθώς από τον δεύτερο ορισμό κάθε διαφορά σημείων δίνει διάνυσμα, και όλα έχουν αρχή το ίδιο σημείο a_1. Έτσι καθησυχασμένοι, λοιπόν, στο εξής θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τους αφινικούς συνδυασμούς.

Βλέπουμε παρεμπιπτόντως ότι η έννοια του αφινικού συνδυασμού είναι πιό ¨συμμετρική¨ ως προς τα σημεία του (όπως είχαμε παρατηρήσει και πριν): κανείς δεν μας εμποδίζει να επιλέξουμε άλλο σημείο ως αφετηρία, π.χ. το a_m, οπότε να γράψουμε

$$a = a_m + t_1(a_1 - a_m) + t_2(a_2 - a_m) + \ldots + t_{m-1}(a_{m-1} - a_m)!$$

Οποιαδήποτε άλλη επιλογή αφετηρίας δίνει κάτι παρόμοιο.

Είναι σαφές ότι οι *αφινικοί συνδυασμοί* θα παίξουν ανάλογο ρόλο στην Αφινινκή Γεωμετρία με αυτόν των *γραμμικών συνδυασμών* σε διανυσματικούς χώρους. Με βάση τα παραπάνω, η αντιστοίχιση με όρους της Γραμμικής Άλγεβρας είναι εύκολη υπόθεση και μάλιστα υποδεικνύει τρόπους χρήσης των. Αυτό θα αναπτύξουμε αμέσως τώρα.

Ορισμός 2.4. Εάν δίνονται σημεία $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ του αφινικού χώρου X^n, ορίζουμε το **αφινικό** τους **ανάπτυγμα** ως

$$\operatorname{affspan}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i a_i,\ \sum_{i=1}^m t_i = 1 \right\}.$$

(Δηλαδή το σύνολο όλων των αφινικών συνδυασμών τους.)

Ορισμός 2.5. Ένα υποσύνολο του ΑΧ X^n είναι **αφινικός υποχώρος** του εάν για οποιαδήποτε σημεία του, περιλαμβάνει και όλους τους αφινικούς συνδυασμούς τους.

[3] Μας βολεύει να αλλάξουμε το σύμβολο των συντελεστών από x_i σε t_i, καθώς δεν συνδέονται απαραίτητα με συντεταγμένες.

Είναι έτσι προφανές ότι κάθε αφινικό ανάπτυγμα δίνει αφινικό υποχώρο.[4] Πρέπει να είναι επίσης προφανές ότι εάν επιλέξουμε σημείο αφετηρίας και θεωρήσουμε όλα τα διανύσματα διαφοράς, ο αφινικός υποχώρος θα αντιστοιχίσει σε διανυσματικό υποχώρο του V^n.

Απλά παραδείγματα: για ένα σημείο, το ανάπτυγμα είναι πάλι το μονοσύνολο του σημείου αυτού (γιατί;). Για δύο διακριτά σημεία, έχουμε αφινικό ανάπτυγμα

$$\mathrm{affspan}(a_1, a_2) = \{t_1 a_1 + t_2 a_2,\ t_1 + t_2 = 1\} = \{(1-t)a_1 + t a_2, t \in \mathbf{R}\},$$

το οποίο αναγνωρίζουμε ως την ευθεία που περνά από τα σημεία αυτά.

Για να προχωρήσουμε περαιτέρω, θα χρειαστούμε αφινική μορφή της έννοιας εξάρτησης και ανεξαρτησίας *σημείων* (μας βολεύει να πάρουμε πλήθος $m+1$ αντί m και να αρχίσουμε από δείκτη 0):

Ορισμός 2.6. Τα $m+1$ σημεία ($m \geq 0$) $(a_0, \ldots, a_m)$ του ΑΧ X^n είναι **αφινικά ανεξάρτητα** εάν τα m διανύσματα διαφοράς $\mathbf{b}_1 = a_1 - a_0, \ldots, \mathbf{b}_m = a_m - a_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον ΔΧ V^n.

Φτάσαμε έτσι και στον ορισμό *βάσης* αφινικού χώρου. Όπως πάντα, έχουμε δύο ισοδύναμες επιλογές: η πρώτη είναι να μετατρέψουμε τον ΑΧ σε ΔΧ με επιλογή αφετηρίας και να επιλέξουμε βάση του ΔΧ. Η δεύτερη αποφεύγει την επιλογή αυτή και παραμένει σε επίπεδο σημείων.

Ορισμός 2.7 (Βάσεις)**.** 1) Σε αφινικό χώρο $(X^n, V^n, \mathbin{+\!\!\!\rightarrow})$ διάστασης n, επιλογή σημείου a_0 ως αρχή/αφετηρία και επιλογή βάσης $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ του ΔΧ V^n δίνει **βάση** του ΑΧ, που λέγεται και **πλαίσιο (frame)** του X^n και γράφουμε $(a_0, \mathcal{B})$.

2) Στον ΑΧ $(X^n, V^n, \mathbin{+\!\!\!\rightarrow})$ διάστασης n, **αφινική βάση** του είναι επιλογή $n+1$ σημείων τα οποία είναι αφινικά ανεξάρτητα και έχουν αφινικό ανάπτυγμα όλο το X^n. Γράφουμε

$$\mathcal{A} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

για την βάση αυτή, όπου υποθέσαμε επιπλέον ότι είναι διατεταγμένη.

Εάν $(a_0, \mathcal{B})$ είναι πλαίσιο, είδαμε ήδη ότι κάθε σημείο $a \in X^n$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $a = a_0 \mathbin{+\!\!\!\rightarrow} \mathbf{v}$, για κάποιο $\mathbf{v} \in V^n$ και το $\mathbf{v}$ γράφεται με μοναδικό επίσης τρόπο μέσω της βάσης:

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + x_n \mathbf{b}_n.$$

Για τη δεύτερη μορφή του ορισμού βάσης, χρησιμοποιούμε τον ορισμό αφινικής ανεξαρτησίας.

[4] Καθώς πρέπει να επιτρέψουμε και την πιθανότητα να έχουμε κενό σύνολο σημείων, ως τετριμμένη περίπτωση αφινικού υποχώρου θεωρείται το κενό σύνολο. Αυτή η διαφορά με τους διανυσματικούς χώρους έχει κάποια λογική: τομή διανυσματικών υποχώρων δεν είναι ποτέ κενή, καθώς πάντα περιλαμβάνει το μηδενικό διάνυσμα. Τομή αφινικών υποχώρων, όμως, μπορεί κάλλιστα να είναι κενή!

Θυμίζουμε ότι στη μορφή αυτή, έχουμε ελευθερία στην επιλογή σημείου αφετηρίας.

Στις δύο μορφές βάσης αντιστοιχούν και δύο είδη συντεταγμένων:

Ορισμός 2.8. 1) Εάν έχουμε πλαίσιο $(a_0, \mathcal{B})$ του ΑΧ X^n, οι **αφινικές συντεταγμένες** σημείου $a \in X^n$ ως προς το πλαίσιο είναι οι n αριθμοί $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ που δίνουν το διάνυσμα $\mathbf{v}$, με $a = a_0 \nrightarrow \mathbf{v}$, ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Είναι βολικό να συμβολίσουμε τις αφινικές συντεταγμένες, ως προς συγκεκριμένη επιλογή βάσης βέβαια, *ως κανονικό διάνυσμα στήλης*, δηλαδή να έχουμε για γενικό σημείο $a \in X^n$,

$$a = a_0 \nrightarrow x_1\mathbf{b}_1 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}.$$

(Ο δείκτης $\mathcal{A}$ μας θυμίζει ως προς ποιά βάση παίρνουμε συντεταγμένες.)

2) Οι **βαρυκεντρικές συντεταγμένες** του σημείου $a \in X^n$ ως προς την αφινική βάση $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ είναι οι μοναδικοί $n+1$ αριθμοί t_i, ώστε το a δίνεται από τον αφινικό συνδυασμό

$$a = t_0a_0 + t_1a_1 + \ldots + t_na_n,$$

με το άθροισμά τους είναι πάντα ίσο με μονάδα.[5]

Μιά σύγκριση των δύο μας δίνει φυσικά ότι

$$t_1 = x_1,\ t_2 = x_2, \ldots t_n = x_n \quad \text{και } t_0 = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n,$$

οπότε περνάμε αυτόματα από το ένα στο άλλο είδος συντεταγμένων και δεν υπάρχει ουσιαστικός λόγος να διατηρήσουμε τους δύο συμβολισμούς.

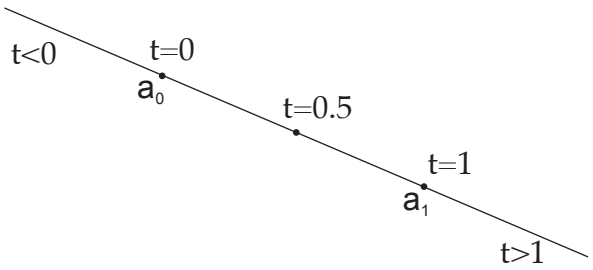
Ας δούμε τα βασικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.3 (**Ευθεία**). Αφινικός χώρος μίας διάστασης θεωρείται ότι είναι *ευθεία* (με τη συνήθη ερμηνεία από την σχολική γεωμετρία). Αφινική βάση του είναι δύο διακριτά σημεία (a_0, a_1) (καθώς η διαφορά τους $a_1 - a_0$ είναι μη-μηδενικό, και επομένως "γραμμικά ανεξάρτητο" διάνυσμα!) Εκφράζοντας την ευθεία ως το αφινικό ανάπτυγμα

$$\ell = \{t_0a_0 + t_1a_1,\ t_0 + t_1 = 1\} = \{(1-t)a_0 + ta_1,\ t \in \mathbf{R}\}$$

βλέπουμε ότι αρκεί να δώσουμε *μία μόνο* βαρυκεντρική συντεταγμένη, την τιμή του t. Έτσι, το a_0 αντιστοιχεί στο $t = 0$, το $t = 1$ στο a_1, για $t = 1/2$ έχουμε το μέσο σημείο $(a_0+a_1)/2$, για $t > 1$ έχουμε σημεία από την εξωτερική πλευρά του a_1 και για $t < 0$ σημεία στην εξωτερική πλευρά του a_0 (βλ. το Σχήμα 2.5).

[5] Ο λόγος για το όνομα "βαρυκεντρικές" θα φανεί πολύ σύντομα, στο παράδειγμα του επιπέδου 2.4.



Σχήμα 2.5: Παραμέτρηση της αφινικής ευθείας με βάση τα σημεία a_0, a_1. Το διάστημα από το a_0 στο a_1 αντιστοιχεί στο διάστημα $[0,1] \subset \mathbf{R}^1$.

Εάν θεωρήσουμε ότι έχουμε διαθέσιμα βάρη συνολικής μάζας μίας μονάδας βάρους και τοποθετήσουμε ποσοστό $(1-t)$ στο σημείο a_0 και t στο a_1, τότε το σημείο της ευθείας με βαρυκεντρικές συντεταγμένες $(1-t, t)$ είναι, από τις στοιχειώδεις έννοιες της Φυσικής, ακριβώς το **κέντρο βάρους** των μαζών. Καθώς μάζες είναι θετικές, η φυσική αναλογία αυτή ισχύει μόνο για τιμές του t στο διάστημα $[0,1]$, οπότε και παίρνουμε σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο σημεία. Αν επιτρέψουμε ¨αρνητικές¨ μάζες, τότε έχουμε γενικευμένο κέντρο βάρους, που δίνεται πάλι από το σημείο με συντεταγμένες $(1-t, t)$.

(Ο πρώτος ορισμός βάσης μας μεταφέρει σε ΔΧ, όπου η ανάλυση της ευθείας ακολουθεί ακριβώς τα ίχνη της ανάλυσής μας στο προηγούμενο κεφάλαιο 1.5.1, κι έτσι παραλείπεται.)

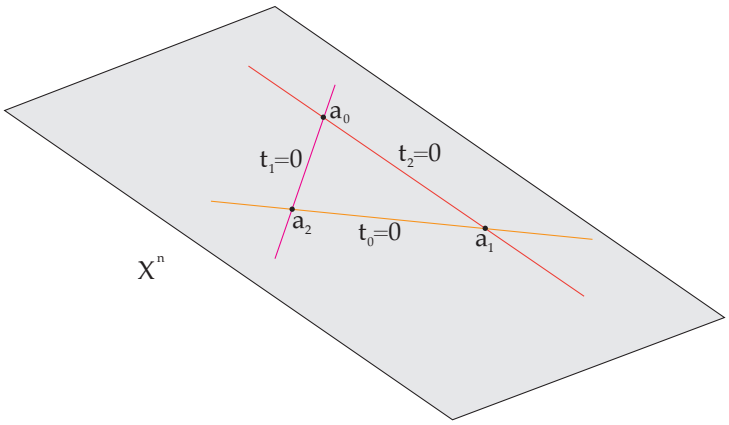
Παράδειγμα 2.4 (**Επίπεδο**). Αφινικός χώρος δύο διαστάσεων θεωρείται ότι είναι επίπεδο. Έστω (a_0, a_1, a_2) αφινική βάση. Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες (t_0, t_1, t_2) μπορούν να σμικρυνθούν σε δύο (όπως κάναμε για την ευθεία), αλλά είναι καλύτερο να τις αφήσουμε ως έχουν, προς το παρόν. Θα μπορέσουμε να εξηγήσουμε έτσι και την ερμηνεία τους ως βαρύκεντρα.

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι από την υπόθεση ότι τα τρία σημεία δίνουν βάση έπεται ότι έχουμε μη-εκφυλισμένο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία a_0, a_1 και a_2. Για $t_0 = 0$, έχουμε αφινικούς συνδυασμούς των δύο απομεινάντων σημείων, δηλαδή την ευθεία που ορίζουν τα a_1, a_2. Ανάλογα, $t_1 = 0$ δίνει την ευθεία των a_0, a_2 και $t_2 = 0$ την ευθεία a_0, a_1 (Σχήμα 2.6).

Μπορούμε να προχωρήσουμε λίγο παραπέρα: από το προηγούμενο παράδειγμα της ευθείας, παρατηρούμε ότι τιμές του t στο διάστημα $[0,1]$ δίνουν σημεία μεταξύ των a_0 και a_1, δηλαδή πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει. Έτσι η πλευρά a_1a_2 περιγράφεται ως το σύνολο σημείων με συντεταγμένες (t_0, t_1, t_2) με $t_0 = 0$ και με $t_1 + t_2 = 1$ και επιπλέον $t_1, t_2 > 0$ (γιατί;)

Πρόταση 2.1. *Το **τρίγωνο** $\triangle(a_0, a_, a_2)$ είναι το υποσύνολο*

$$\{t_0a_0 + t_1a_1 + t_2a_2,\ t_0 + t_1 + t_2 = 1,\ t_0, t_1, t_2 \geq 0\}$$



Σχήμα 2.6: Βαρυκεντρικές συντεταγμένες σε αφινικό επιπεδο με αφινική βάση (a_0, a_1, a_2).

του AX X^n.

Το τρίγωνο είναι ***κυρτό*** *υποσύνολο, με την έννοια ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία του, περιλαμβάνει και το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει.*

Απόδειξη. Άσκηση. Εναλλακτικά, τί θα λέγατε για το ακόλουθο επιχείρημα από την Φυσική: αν στις τρεις κορυφές τοποθετήσουμε *θετικές* μάζες, με συνολική μάζα ένα, το κέντρο βάρους βρίσκεται εντός του τριγώνου! □

Μπορούμε να δώσουμε τώρα μιά καθαρά αφινική απόδειξη ενός γνωστού αποτελέσματος της Γεωμετρίας:

Θεώρημα 2.1. *Οι τρεις διάμεσοι τυχόντος τριγώνου τέμνονται σε κοινό σημείο.*

Απόδειξη. Οι αφινικές εξισώσεις των διαμέσων είναι εύκολο να δοθούν: συνδέεουν κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς του τριγώνου. Έτσι είναι οι τρεις ευθείες

$$\ell_0 = \{(1-t)a_0 + t(a_1 + a_2)/2,\ t \in \mathbf{R}\},$$
$$\ell_1 = \{(1-t)a_1 + t(a_0 + a_2)/2,\ t \in \mathbf{R}\},$$
$$\ell_2 = \{(1-t)a_2 + t(a_0 + a_1)/2,\ t \in \mathbf{R}\}.$$

Ας βρούμε την τομή των δύο πρώτων (όπου αλλάζουμε το όνομα της βαρυκεντρικής συντεταγμένης της δεύτερης ευθείας). Ζητούμε τιμές των t, s ώστε να έχουμε κοινό σημείο:

$$(1-t)a_0 + t(a_1 + a_2)/2 = (1-s)a_1 + s(a_0 + a_2)/2.$$

Η εξίσωση δίνει τις ισότητες: $(1-t) = s/2$, $t/2 = 1-s$ και $t/2 = s/2$, που έχουν μοναδική λύση $t = s = 2/3$. Το κοινό σημείο είναι ακριβώς το $(a_0 + a_1 + a_2)/3$. Αλλά το σημείο αυτό ανήκει και στην τρίτη διάμεσο ℓ_2

(θέτοντας $t = 2/3$ στην αφινική μορφή της ℓ_2). Είναι προφανές ότι το σημείο $(a_0 + a_1 + a_2)/3$ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου αν θέσουμε από ένα τρίτο της συνολικής μάζας σε κάθε κορυφή. □

Η σύγκριση με την συνθετική απόδειξη του αποτελέσματος αυτού (στο Σχήμα 2.7 η απόδειξη που δίνει το σχολικό βιβλίο Ευκλείδειας Γεωμετρίας) είναι ενδιαφέρουσα. Τίθεται ίσως το ερώτημα: μήπως μπορούμε να δείξουμε με παρόμοιο άμεσο τρόπο και άλλες ιδιότητες τριγώνων, π.χ. το κοινό σημείο των τριών καθέτων ή διχοτόμων; Η απάντηση είναι ότι σαφώς και υπάρχουν αναλυτικές αποδείξεις, αλλά δεν ανήκουν στο αντικείμενο της Αφινικής Γεωμετρίας, καθώς υπεισέρχονται έννοιες *καθετότητας* και *γωνίας*, οι οποίες προς το παρόν δεν ανήκουν στο σύμπαν της αφινικής θεώρησης που αναπτύσσουμε. Γενικά, αφινικός (ή διανυσματικός) χώρος είναι σύνολο όπου ορίζονται αφινικοί (ή γραμμικοί) συνδυασμοί, αλλά τίποτε επιπλέον. Αργότερα, θα προσθέσουμε στη δομή αυτή και την έννοια του *εσωτερικού γινομένου,* που θα μας δώσει έννοιες μήκους, καθετότητας και γωνίας —αλλά αυτή θα είναι η ακριβώς η Ευκλείδεια Γεωμετρία.

2.3 Τα βασικά παραδείγματα αφινικών χώρων

Πριν προχωρήσουμε στην περαιτέρω μελέτη των αφινικών χώρων και των απεικονίσεών τους, καλό είναι να οργανώσουμε τις βασικές κατηγορίες παραδειγμάτων όπου χρειαζόμαστε την έννοια του αφινικού, σε αντιδιαστολή με διανυσματικού, χώρου.

1. *Διανυσματικοί χώροι* ως αφινικοί χώροι, με τη μόνη διαφορά να είναι στην αυθαίρετη επιλογή αφετηρίας. Ουσιαστικά πρόκειται για μετατοπίσεις ΔΧ. Θυμίζουμε ότι κάθε επιλογή αρχικού διανύσματος $\mathbf{v}_0$ δίνει 1:1, επί απεικόνιση (bijection) του ΔΧ V^n με τον εαυτό του, μέσω της απεικόνισης $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$.

2. *Αφινικοί υποχώροι διανυσματικού χώρου* V^N. Καθώς ο ορισμός αφινικής ανεξαρτησίας μπορεί να εφαρμοστεί και για $n+1$ διανύσματα

$$(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

του ΔΧ V^N (απαιτώντας τη γραμμική ανεξαρτησία των n διανυσμάτων διαφοράς $\mathbf{b}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0$), ένας συνήθης τρόπος να πάρουμε αφινικό χώρο διάστασης n είναι με επιλογή $n+1$ αφινικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

Είναι σαφές ότι ο χώρος που παίρνουμε είναι *παράλληλη μετατόπιση* του διανυσματικού υποχώρου που ορίζεται ως το κανονικό ανάπτυγμα $\mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ των διανυσμάτων διαφοράς, με τα διανύσματα αυτά να δίνουν βάση του. Είναι επίσης σαφές ότι έχουμε

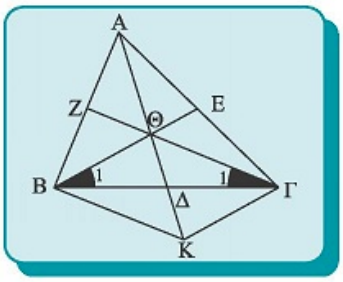
$$\mathrm{affspan}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_0 + \mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n).$$

5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη



Σχήμα 26

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή $B_1 + \Gamma_1 B + \Gamma$ 2ΑΔ.

i) Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα ΘΚ = ΑΘ. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε ΕΘ =// $\frac{\Gamma K}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε ΖΘ =// $\frac{BK}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΕ //ΓΚ και ΓΖ // ΒΚ, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε ΒΔ = ΔΓ.
Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται ***βαρύκεντρο*** (ή ***κέντρο βάρους***) του τριγώνου.
ii) Από το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη

$$\Theta\Delta = \Delta K = \frac{\Theta K}{2}, \text{ άρα } \Theta\Delta = \frac{A\Theta}{2} \text{ ή } A\Theta = 2\Theta\Delta.$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$E\Theta = \frac{\Gamma K}{2} = \frac{B\Theta}{2} \text{ ή } B\Theta = 2\Theta E.$$

Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε ΓΘ = 2ΘΖ. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Επίσης έχουμε ότι ΑΔ = ΑΘ + ΘΔ = 2ΘΔ + ΘΔ = 3ΘΔ. Άρα

$$\Theta\Delta = \frac{1}{3}A\Delta, \text{ οπότε } A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta.$$

Όμοια προκύπτει ότι $B\Theta = \frac{2}{3}BE$ και $\Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma Z$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην παραπάνω πρόταση θεωρήσαμε το σημείο τομής Θ των δύο διαμέσων ΒΕ και ΓΖ και αποδείξαμε ότι η ΑΘ αν προεκταθεί είναι η τρίτη διάμεσος ΑΔ.
Αυτός ο τρόπος αποτελεί μια βασική μέθοδο για να αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες συντρέχουν σε κάποιο σημείο.

Σχήμα 2.7: Συνθετική απόδειξη του θεωρήματος ύπαρξης κοινού σημείου των διαμέσων τριγώνου (σελίδα από το βιβλίο *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Γενικού Λυκείου*).

Για παράδειγμα αν $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ είναι δύο διακριτά, μη-μηδενικά διανύσματα, έχουμε ευθεία $\mathrm{affspan}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_0 + \mathrm{span}(\mathbf{b})$, όπου $\mathbf{b} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$. Η ευθεία αυτή δεν είναι γενικά διανυσματικός υποχώρος (δεν περνά από το $\mathbf{0}$), εκτός εάν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά. Δύο ευθείες $\mathrm{affspan}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$, $\mathrm{affspan}(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1)$ είναι *παράλληλες* εάν και μόνον εάν τα διανύσματα διαφοράς $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$, $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0$ είναι συγγραμμικά *(γιατί;)*

3. *Σύνολα λύσεων γραμμικών συστημάτων εξισώσεων.* Όπως έχουμε δει, η δομή του συνόλου λύσεων του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ (εφόσον είναι μη-κενό) είναι: $\mathbf{x}_p + \ker A$, όπου $\mathbf{x}_p$ είναι κάποια ειδική λύση και $\ker A$ είναι ο πυρήνας του A (ο οποίος είναι πάντοτε υποχώρος του χώρου $\mathbf{R}^n$). Έχουμε αμέσως αφινικό υποχώρο του $\mathbf{R}^n$, δηλαδή είμαστε ουσιαστικά στην προηγούμενη περίπτωση.

   Δύο ειδικές περιπτώσεις βρίσκουν πολλές εφαρμογές:

   (α') Παράλληλες μετατοπίσεις υποχώρων διάστασης $N-1$,[6] για παράδειγμα το οριζόντιο επίπεδο του χώρου $\mathbf{R}^3$. Πιό γενικά, το σύνολο που ορίζεται στο $\mathbf{R}^N$ από την εξίσωση $x_i = 1$. Αυτή είναι η μορφή με την οποία εμφανίζονται οι αφινικοί χώροι στην *Αλγεβρική Γεωμετρία* (έναν τεράστιο κλάδο των Μαθηματικών που, δυστυχώς, συναντά κανείς συνήθως σε μεταπτυχιακό επίπεδο για πρώτη φορά.)

   (β') Στο $\mathbf{R}^{n+1}$, το σύνολο που ορίζεται από τη μοναδική εξίσωση:

   $$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1.$$

   Είναι υπο-επίπεδο του ΔΧ $\mathbf{R}^{n+1}$.

4. *Σύνολο συμπληρωματικών ευθειών δοθέντος υοποχώρου ΔΧ.* Εδώ έχουμε επιτέλους κάτι που δεν έχουμε δει πριν! Εννοούμε το εξής:

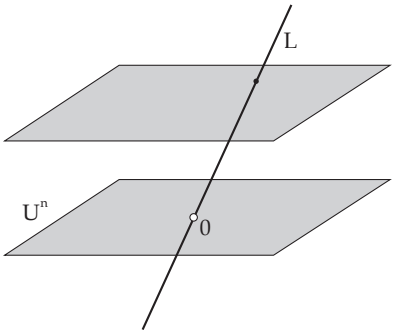
   Δίνεται στον $\mathbf{R}^{n+1}$ υπερ-επίπεδο U^n, π.χ. το $x_{n+1} = 0$. Είναι υποχώρος του $\mathbf{R}^{n+1}$ διάστασης n. Τώρα κάθε ευθεία L η οποία δεν περιέχεται στο U^n είναι συμπλήρωμα του U^n, με την έννοια ότι το άθροισμα $U^n + L$ είναι *ευθύ* και δίνει όλο τον ΔΧ:

   $$U^n \oplus L = \mathbf{R}^{n+1}.$$

   Θέλουμε να δώσουμε στο σύνολο τέτοιων ευθειών τη δομή αφινικού χώρου διάστασης n! Ο τρόπος είναι σχετικά απλός (και τον συναντάμε στην Προβολική Γεωμετρία): καθώς κάθε τέτοια ευθεία τέμνει τον αφινικό χώρο $\mathbf{e}_{n+1} + U^n$ (παράλληλη μετατόπιση του U^n κάθετα κατά το μοναδιαίο διάνυσμα βάσης $\mathbf{e}_{n+1}$) σε μοναδικό σημείο, έχουμε μία 1:1

[6] Τέτοιοι υποχώροι λέγονται συχνά υπερ-επίπεδα (hyperplanes) του ΔΧ.

και επί αντιστοίχιση μεταξύ τους (Σχήμα 2.8). Αποδεικνύεται ότι έτσι δίνουμε στο σύνολο των συμπληρωμάτων του U^n τη δομή του αφινικού χώρου $\mathbf{e}_{n+1} + U^n$, που έχει διάσταση n.



Σχήμα 2.8: Το σύνολο των συμπληρωματικών ευθειών του οριζόντιου επιπέδου είναι αφινικός χώρος ίδιας διάστασης με το επίπεδο.

Συμβολισμός: έχει επικρατήσει να γράφουμε $\mathbb{A}^n$ για αφινικό χώρο n διαστάσεων. Αν θέλουμε να ξεκαθαρίσουμε το σώμα k στο οποίο ορίζεται, γράφουμε $\mathbb{A}^n_k$. Η βασική περίπτωση είναι λοιπόν ο ΑΧ $\mathbb{A}^n_{\mathbf{R}}$.

2.3.1 Ένα λεπτομερές παράδειγμα

Στον πραγματικό χώρο θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta\},$$

για συντελεστές $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Έχουμε προφανώς *επίπεδο*, το οποίο, εφόσον $\delta \neq 0$ είναι αφινικός, αλλά όχι διανυσματικός υποχώρος. Έχουμε λοιπόν παράδειγμα της δεύτερης κατηγορίας. (Για ευκολία, σε κάθε χώρο θεωρούμε ότι έχουμε την κανονική της βάση.)

Με όρους *γραμμικών απεικονίσεων*, το σύνολο αυτό είναι η αντίστροφη εικόνα του $\delta \in \mathbf{R}^1$ της γραμμικής απεικόνισης

$$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^1, \quad (x, y, z) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Γνωρίζουμε ότι έχουμε αφινικό χώρο δύο διαστάσεων, αλλά υπάρχουν πολλοί τρόποι να δώσουμε δράση του $\mathbf{R}^2$ στο σύνολο αυτό:

$$\mathcal{P} \times \mathbf{R}^2 \to \mathcal{P} : \ (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = ?$$

Ως επιλογή *πρώτου τρόπου,* και αν υποθέσουμε ότι το επίπεδο *δεν είναι οριζόντιο*, δηλαδή $\gamma \neq 0$,[7] δοκιμάζουμε να στείλουμε

$$x \mapsto x + s, \ y \mapsto y + t.$$

[7] Παρόμοια δουλεύουμε αν άλλος συντελεστής είναι μη-μηδενικός, οπότε δεν έχουμε χάσει γενικότητα.

Αλλά τότε, για να έχουμε σημείο του επιπέδου, η επιλογή του $z \mapsto z + u$ πρέπει να είναι τέτοια ώστε

$$\alpha(x+s) + \beta(y+t) + \gamma(z+u) = \delta,$$

οπότε: $\gamma u = -(\alpha s + \beta t)$, δηλαδή $u = -(\alpha s + \beta t)/\gamma$ (καθώς υποθέσαμε ότι το σημείο $(x, y, z) \in \mathcal{P}$.)

Η δράση είναι λοιπόν

$$\mathcal{P} \times \mathbf{R}^2 \to \mathcal{P} : \ (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \left(x + s, y + t, z - \frac{(\alpha x + \beta y)}{\gamma} \right).$$

Ποιά είναι η σχέση του τύπου αυτού με τη θεωρία που έχουμε δώσει περί λύσεων ΓΣΕ ; Δεν είναι δύσκολή η ερμηνεία του. Το σημείο (x, y, z) υποθέσαμε ανήκει στο επίπεδο, οπότε παίζει το ρόλο της *ειδικής λύσης*. Οι δύο βαθμοί ελευθερίας θα πρέπει τότε να συνδέονται με τη διάσταση του πυρήνα της απεικόνισης. Αλλά εδώ έχουμε πράγματι $\dim \ker A = 2$ καθώς πηγαίνουμε από τρεις σε μία διάσταση και $\operatorname{rank} A = 1$ (A είναι ο 1×3 πίνακας (α, β, γ).)

Μάλιστα, οι όροι με το s και με το t συνδέονται με διανύσματα βάσης του πυρήνα! Πράγματι, στο ομογενές γραμμικό σύστημα του αρχικού ΓΣΕ:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

θέτοντας $x = s$ αυθαίρετο και $y = 0$, έχουμε λύσεις για το z: $z = -(\alpha s)/\gamma$. Για δεύτερη, γραμμικά ανεξάρτητη λύση, θέτουμε $x = 0$ και $y = t$ (αυθαίρετο), οπότε $z = -(\beta t)/\gamma$. Έτσι, ο πυρήνας είναι

$$\ker A = \operatorname{span}((1, 0, -\alpha/\gamma), (0, 1, -\beta/\gamma)).$$

Για να δούμε ότι η παραπάνω δράση δεν είναι μοναδική, θεωρούμε *δεύτερο τρόπο*[8] να δράσει ο ΔΧ $\mathbf{R}^2$ στο επίπεδο $\mathcal{P}$:

$$(x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = (x + s\beta, y - s\alpha + t\gamma, z - t\beta).$$

Εάν το σημείο (x, y, z) ανήκει στο $\mathcal{P}$, επαληθεύεται ότι και το νέο σημείο ανήκει στο επίπεδο:

$$\alpha(x + s\beta) + \beta(y - s\alpha + t\gamma) + \gamma(z - t\beta) = \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta.$$

2.4 Αφινικές απεικονίσεις

Τα πράγματα είναι πολύ απλά: ακριβώς όπως θεωρήσαμε φυσικό να ορίσουμε *γραμμικές* απεικονίσεις για διανυσματικούς χώρους ως συναρτήσεις που

[8] Εδώ υποθέσαμε ότι οι συντελεστές α, β, γ είναι όλοι μη-μηδενικοί. Προσαρμόζεται βέβαια και σε περίπτωση που έχουμε κάποιον μηδενικό συντελεστή.

¨διατηρούν¨ τους *γραμμικούς συνδυασμούς,* έτσι και για αφινικούς χώρους, θα ξεχωρίσουμε ως ειδικές τις απεικονίσεις που διατηρούν τους *αφινικούς* συνδυασμούς —και θα τις ονομάσουμε *αφινικές απεικονίσεις*!

Έτσι, μία απεικόνιση $T : V \to W$, με V, W διανυσματικούς χώρους, είναι *γραμμική* εάν για αυθαίρετο γραμμικό συνδυασμό, δηλαδή για κάθε k, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $\mathbf{v}_i \in V$,

$$T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) + \ldots + \alpha_k T(\mathbf{v}_k).$$

Κάθε γραμμική απεικόνιση στέλνει το $\mathbf{0} \in V$ στο $\mathbf{0} \in W$. Εάν δίνονται βάσεις των V και W, η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι, από τα παραπάνω, *η T ορίζεται πλήρως από τις εικόνες των διανυσμάτων βάσης του V.*

Κατ' αναλογία λοιπόν, μία απεικόνιση $S : X \to Y$ από αφινικό χώρο X σε αφινικό χώρο Y είναι **αφινική** εάν για αυθαίρετο αφινικό συνδυασμό σημείων του X έχουμε:

$$S(t_0a_0 + t_1a_1 + \ldots + t_ka_k) = t_0S(a_0) + t_1S(a_1) + \ldots + t_kS(a_k),$$

(όπου όπως πάντα $t_0 + t_1 + \ldots + t_k = 1$.)

Έτσι, αν έχουμε για παράδειγμα δύο σημεία $a_0 \neq a_1$ του X και γράψουμε $t_1 = t$, $t_0 = 1-t$, η αφινική απεικόνιση S θα στείλει την ευθεία $\mathrm{affspan}(a_0, a_1)$ στην ευθεία $\mathrm{affspan}(S(a_0), S(a_1))$, εφόσον βέβαια $S(a_0) \neq S(a_1)$, καθώς

$$S((1-t)a_0 + ta_1) = (1-t)S(a_0) + tS(a_1), \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Θα διατηρήσει επίσης τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες, για παράδειγμα το μέσο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος (a_0, a_1) θα απεικονιστεί στο μέσο σημείο του τμήματος $(S(a_0), S(a_1))$.

Πιό γενικά, η αφινική απεικόνιση θα στείλει αφινικούς υποχώρους του X σε αφινικούς υποχώρους του Y, όχι απαραίτητα ίδιας διάστασης.

Καθώς τα σημεία αφινικών χώρων γράφονται με μοναδικό τρόπο ως προς αφινική βάση (μίας από τις δύο μορφές που δώσαμε), για να εκφράσουμε μία αφινική απεικόνιση —και να δώσουμε κάποια παραδείγματα!— θεωρούμε βάσεις, $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ του X και $(a'_0, a'_1, \ldots, a'_m)$ του Y (όπου $\dim X = n$, $\dim Y = m$).

Κεφάλαιο 3

Παραρτήματα

3.1 Το φασματικό θεώρημα

Το παρακάτω θεώρημα είναι βασικό στην ανάλυση διγραμμικών συναρτήσεων:

Θεώρημα 3.1. *Έστω $A \in M_n(\mathbf{R})$ συμμετρικός πίνακας. Τότε*

1. *Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες πραγματικοί αριθμοί.*
2. *Υπάρχουν ακριβώς n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα οποία είναι ορθογώνια μεταξύ τους και επομένως μπορούμε να τα επιλέξουμε έτσι ώστε να δίνουν ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^n$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε εδώ μόνο ότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικώς. Γενικά κάθε ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbf{C}$ και κάθε ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{e} \in \mathbf{C}^n$. Παίρνοντας το συζυγές της σχέσης $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$, έχουμε $A\overline{\mathbf{e}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{e}}$. Θεωρούμε τώρα το εσωτερικό γινόμενο που ορίζει ο συμμετρικός πίνακας A, $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >_A = \mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$ και υπολογίζουμε

$$< \overline{\mathbf{e}}, \mathbf{e} >_A = \overline{\mathbf{e}} \cdot A\mathbf{e} = \overline{\mathbf{e}} \cdot \lambda\mathbf{e} = \lambda \, ||\mathbf{e}||^2.$$

Από την συμμετρία

$$< \overline{\mathbf{e}}, \mathbf{e} >_A = < \mathbf{e}, \overline{\mathbf{e}} >_A = \mathbf{e} \cdot A\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot \overline{\lambda}\overline{\mathbf{e}} = \overline{\lambda} \, ||\mathbf{e}||^2.$$

Καθώς κάθε ιδιοδιάνυσμα είναι μη-μηδενικό, συμπεραίνουμε οτι $\lambda = \overline{\lambda}$, δηλαδή η ιδιοτιμή είναι πραγματική. □

3.2 Το κριτήριο του Sylvester και γενικεύσεις του

Ένας συμμετρικός, πραγματικός πίνακας Q λέγεται **θετικά ορισμένος** εάν η τετραγωνική μορφή που ορίζει είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή εάν για κάθε $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$,

$$q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T Q \mathbf{v} > 0.$$

Από το φασματικό θεώρημα, για τέτοιον πίνακα Q υπάρχει ορθοκανονική βάση $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ως προς την οποία ο Q είναι διαγώνιος, και επομένως για τις αντίστοιχες συντεταγμένες $z_1, z_2, \ldots, z_n$,

$$q(\mathbf{v}) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2.$$

Εύκολα βλέπουμε λοιπόν ότι *ο Q είναι θετικά ορσμένος εάν και μόνο εάν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικοί αριθμοί.*

Καθώς ο υπολογισμός με το χέρι των ιδιοτιμών ενός πίνακα είναι γενικά ανέφικτος σε διάσταση μεγαλύτερη του δύο, είναι χρήσιμο να έχουμε διαθέσιμο κριτήριο το οποίο μπορεί να ελεγχθεί πιο άμεσα. Πράγματι, υπάρχει το γνωστό κριτήριο του Sylvester. Για να το διατυπώσουμε, ας ορίσουμε υποπίνακες του Q διάστασης $k \times k$, για $k = 1, 2, \ldots, n$ ως εξής: $Q(1, 2, \ldots, k)$ είναι ο τετραγωνικός πίνακας των πρώτων k σειρών και των πρώτων k στηλών. Οι ορίζουσες των πινάκων αυτών λέγονται *ηγετικές πρωτεύουσες ελάσσονες* του Q (leading principal minors, συντομογραφία ΗΠΕ).

Θεώρημα 3.2 (Sylvester). *Ο πίνακας Q είναι θετικά ορισμένος εάν όλες οι ηγετικές πρωτεύουσες ελάσσονες του Q είναι θετικοί αριθμοί.*

Θα δώσουμε απόδειξη βασισμένη στο φασματικό θεώρημα και στοιχειώδεις ιδιότητες υποχώρων ενός Δ.Χ.

Απόδειξη.

Λήμμα 3.1. *Έστω $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ βάση του Δ.Χ. V^n και W^k υποχώρος του διάστασης k $(1 \leq k < n)$.*

Τότε οποιοσδήποτε υποχώρος που είναι ανάπτυγμα υποσυνόλου των διανυσμάτων βάσης με το πολύ $k-1$ από αυτά να παραλείπονται έχει μη-τετριμμένη τομή με τον W^k. Έτσι, για οποιοδήποτε $m < k$, έχουμε

$$W^k \cap \operatorname{span}(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_n) \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Η απόδειξη είναι απλή και έπεται του τύπου

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2),$$

καθώς θέτοντας $U^{n-m} = \operatorname{span}(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_n)$, $\dim \operatorname{span}(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_n) = n - m$ και επομένως

$$\dim V = n \geq \dim(W^k + U^{n-m}) = k + (n-m) - \dim(W^k \cap U^{n-m}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(W^k \cap U^{n-m}) \geq k - m > 0$$

□

Ερχόμαστε τώρα στο αποτέλεσμα στο οποίο βασίζεται η απόδειξη του θεωρήματος. Θα μας φανεί χρήσιμο και αργότερα, για κάποιες γενικεύσεις.

Πρόταση 3.1. *Έστω ότι υπάρχει υποχώρος k διαστάσεων W^k, στον οποίον η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη. Τότε ο πίνακας Q έχει τουλάχιστον k θετικές ιδιοτιμές.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε λιγότερες από k θετικές ιδιοτιμές, ας πούμε $m < k$.

Απο το Φασματικό Θεώρημα 3.1, έχουμε ορθοκανονική βάση

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\},$$

όπου έχουμε αντιστοιχίσει τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{e}_i$ στις ιδιοτιμές λ_i σε φθίνουσα διάταξη

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m > 0 \geq \lambda_{m+1} \geq \cdots \lambda_n.$$

Αλλά τώρα, από το Λήμμα, έχουμε μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ το οποίο ανήκει και στον W^k και στο $\operatorname{span}(\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Καθώς $\mathbf{v} \in W^k$, $q(\mathbf{v}) > 0$ και καθώς $\mathbf{v} \in \operatorname{span}(\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $\mathbf{v} = z_{m+1}\mathbf{e}_{m+1} + \ldots + z_n\mathbf{e}_n$, οπότε

$$q(\mathbf{v}) = \lambda_{m+1} z_{m+1}^2 + \ldots \lambda_n z_n^2 \leq 0 \ \Rightarrow\Leftarrow$$

□

Περνάμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος.

Απόδειξη θεωρήματος Sylvester. Επαγωγικά. Προφανές για $n = 1$.

Έστω ότι ισχύει για n και θέλουμε να το δείξουμε για $n + 1$. Οι ηγετικές πρωτεύουσες ελάσσονες μέχρι διάσταση n είναι θετικές και έχουμε n θετικές ιδιοτιμές. Αλλά καθώς, επιπλέον, $\det Q > 0$ και όπως ξέρουμε η ορίζουσα είναι ίση με το γινόμενο των ιδιοτιμών του Q, συμπεραίνουμε ότι και οι $n + 1$ ιδιοτιμές είναι θετικές (και επομένως ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος). □

Πόρισμα 3.1.

1. *Εάν $Q(1) < 0$ και η ακολουθία των ηγετικών πρωτευουσών ελασσόνων συνεχίζει εναλλασσόμενα ($- + - + \ldots$), τότε ο πίνακας Q είναι αρνητικά ορισμένος.*

2. *Εάν όλες οι ΗΠΕ είναι θετικές εκτός της τελευταίας, δηλαδή της ορίζουσας $\det Q$, η οποία είναι αρνητική, τότε ο Q έχει n θετικές και μία αρνητική ιδιοτμή. Εάν $\det Q = 0$ τότε το συμπέρασμα είναι ότι μία ιδιοτιμή είναι μηδενική και οι άλλες n θετικές.*

Το πρώτο μέρος έπεται αν θεωρήσουμε τον πίνακα $-Q$, ενώ το δεύτερο ακολουθεί την παραπάνω απόδειξη έως το τελευταίο βήμα, όπου καθώς $\det Q < 0$ συμπεραίνουμε ότι μία ιδιοτιμή είναι αρνητική.

Παρατήρηση 3.1. Υπάρχει αντίστοιχο κριτήριο για θετικά ημι-ορισμένο πίνακα, δηλαδή $Q \geq 0$ (το οποίο σημαίνει ότι οι ιδιοτιμές είναι ≥ 0), αλλά στην

περίπτωση αυτή θέλουμε *όλες* οι πρωτεύουσες ελάσσονες να είναι ≥ 0 και όχι μόνο οι ηγετικές. Απλό αντιπαράδειγμα είναι το

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Δεν θα δώσουμε την απόδειξη.

Παρατήρηση 3.2. Με αναδιάταξη των μεταβλητών, τα παραπάνω ισχύουν και για πρωτεύουσες ελάσσονες άλλης επιλογής, για παράδειγμα ξεκινώντας από το (n, n) στοιχείο και ανεβαίνοντας ανά μία διάσταση.

Κεφάλαιο 4

Ασκήσεις

1. (α') Δώστε δράση του ΔΧ $\mathbf{R}^2$ στο αφινικό επίπεδο $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 2\}$. Επίσης, δώστε μία αφινική βάση τριών σημείων (a_0, a_1, a_2) και βρείτε τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες του σημείου $(2, -2, 3) \in \mathcal{P}$ ως προς τη βάση αυτή.

   (β') Στον αφινικό χώρο $\mathbf{A}^3$ με δεδομένη την διατεταγμένη αφινική βάση $\mathcal{A} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, γράφουμε τυχαίο σημείο ως

   $$a = a_0 + x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3, \text{ όπου } \mathbf{b}_i = a_i - a_0, \ i = 1, 2, 3,$$

   δηλαδή x_1, x_2, x_3 είναι οι αφινικές του συντεταγμένες. Γράφουμε $\mathbf{x}$ το διάνυσμα με τις συντεταγμένες αυτές.

   Βρείτε τον πίνακα C και το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}$ ως προς τη βάση $\mathcal{A}$ για την αλλαγή βάσης $\mathbf{z} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ που παίρνουμε από την *μετάθεση* των σημείων βάσης (a_2, a_3, a_0, a_1).

2. Δίνονται τα αφινικά επίπεδα

   $$\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 3x + 2y + z = 6\} \quad \text{και}$$

   $$\mathcal{P}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : -x - 2y + 3z = 2\}.$$

   (α') Δώστε αφινικές βάσεις (a_0, a_1, a_2) και (a'_0, a'_1, a'_2) των $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ αντίστοιχα με a_i (αντίστ. a'_i) τα σημεία τομής των επιπέδων με τους τρεις άξονες x, y, z. Επομένως, δώστε και βάσεις της μορφής $(a_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ και $(a'_0, \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2)$ αντίστοιχα.

   (β') Βρείτε την αφινική απεικόνιση $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, ως προς τις παραπάνω βάσεις, που στέλνει το a_0 στο $-a'_0 + 2a'_2$, το a_1 στο $(a'_0 + a'_1 + a'_2)/3$ και το a_2 στο $(a'_1 + a'_2)/2$. Είναι ομαλή (αντιστρέψιμη); Βρείτε την αντίστροφη εικόνα του σημείου $3a'_1 - 2a'_2$.

3. (α') Δίνονται σημεία $A_0, A_1, \ldots, A_m$ του $\mathbf{R}^n$. Πότε λέμε ότι είναι *αφινικά ανεξάρτητα*; Τί εννοούμε με το αφινικό τους ανάπτυγμα και τί

είναι αυτό όταν τα $m+1$ σημεία είναι αφινικά ανεξάρτητα; Μπορεί να έχουμε $n+1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία στο $\mathbf{R}^n$;

(β΄) Δίνονται αφινικά ανεξάρτητα σημεία A_0, A_1, A_2 του $\mathbf{R}^3$,

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}).$$

Δείξτε ότι το σημείο $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ανήκει στο αφινικό τους ανάπτυγμα εάν και μόνον εάν

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \end{bmatrix} = 0$$

(γ΄) Δώστε την *αναλυτική μορφή* $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ του αφινικού επιπέδου $X \subset \mathbf{R}^3$ που ορίζουν τα σημεία $(2, 1, -2), (3, -2, 1), (1, 1, 3)$. Τέλος, βρείτε το *εμβαδόν* του παραλληλογράμμου το οποίο ορίζουν τα τρία σημεία.

4. (α΄) Τί σημαίνει τέσσερα σημεία (a, b, c, d) του αφινικού χώρου $\mathcal{A}^3$ να είναι *αφινικά ανεξάρτητα;* Εξηγήστε γιατί ορίζουν τετράεδρο. Δώστε την *αλλαγή βάσης* που στέλνει τις κορυφές του τετράεδρου αυτού στα *βαρύκεντρα* των τριγώνων που βρίσκονται ακριβώς απέναντι από κάθε κορυφή.

(β΄) Δώστε την *αφινική απεικόνιση* η οποία απεικονίζει το επίπεδο $x + y + z = 2$ στο επίπεδο $2x - y + 3z = 3$ και στέλνει τα σημεία τομής των επιπέδων με τους άξονες του ενός στα αντίστοιχα σημεία του δευτέρου.

5. (α΄) Δείξτε ότι τα τρία σημεία $B_0 = (2, 3, 0), B_1 = (3, 1, 2), B_2 = (2, 0, 2)$ του χώρου $\mathbf{R}^3$ είναι αφινικά ανεξάρτητα και επομένως έχουν αφινικό ανάπτυγμα επίπεδο, ας πούμε $\mathcal{P}_2$.

(β΄) Επαληθεύστε ότι τα σημεία

$$P = (-1, 0,),\ Q = (0, 1, 0),\ R = (0, 0, 2/3)$$

ανήκουν στο $\mathcal{P}_2$ και δώστε τις *αφινικές και τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες* τους ως προς την διατεταγμένη αφινική του βάση $\mathcal{B} = (B_0, B_1, B_2)$.

(γ΄) Δίνεται τώρα δεύτερο αφινικό επίπεδο $\mathcal{P}_1$ με την αναλυτική μορφή $2x - y + z = 2$. Βρείτε αφινική του βάση $\mathcal{A} = (A_0, A_1, A_2)$ και την μορφή της βάσης: $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})$.

(δ΄) Δώστε τώρα, βασιζόμενοι στα παραπάνω, την αφινική απεικόνιση $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ η οποία στέλνει τα A_0, A_1, A_2 στα σημεία P, Q και R αντίστοιχα (θέλουμε πίνακα και διάνυσμα μετατόπισης). Εάν G είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $A_0A_1A_2$, βρείτε την εικόνα του $f(G)$.

6. Θεωρούμε τετραγωνική συνάρτηση στο αφινικό επίπεδο $\mathbf{A}^2$:

$$f(x,y) = ax^2 + 12xy + 9y^2 + 6x - 10y.$$

(α') Ταξινομήστε τις καμπύλες $f(x,y) = 0$ που προκύπτουν για διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbf{R}$ και δώστε τις αφινικές κανονικές τους μορφές.

(β') Για την τιμή $a = 5$, δώστε την αντίστοιχη ομογενή συνάρτηση $F(X,Y,Z)$ από την οποία, για $Z = 1$ προκύπτει η $f(x,y)$ και αναγνωρίστε την ως τετραγωνική μορφή στο χώρο (πρόσημα των ιδιοτιμών χρειάζονται μόνο).

7. (α') Βρείτε την αφινική ισοδυναμία (δηλαδή την αφινική αλλαγή βάσης) που μετατρέπει την τετραγωνική καμπύλη στον $\mathcal{A}^2$

$$f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 6x + 5y - 1 = 0$$

στην κανονική της μορφή.

(β') Δώστε την αντίστοιχη ομογενή συνάρτηση $F(X,Y,Z)$ από την οποία, για $Z = 1$ προκύπτει η $f(x,y)$ και αναγνωρίστε την ως τετραγωνική επιφάνεια στο **χώρο** *(πρόσημα των ιδιοτιμών χρειάζονται μόνο).*

8. *Τετραγωνική συνάρτηση* δύο μεταβλητών θεωρούμε συνάρτηση

$$q(x,y) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} + f, \quad \text{όπου} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

(α') Για τις παρακάτω τετραγωνικές εξισώσεις $q_i(x,y) = 0$, δώστε τον πίνακα A και επαυξημένο πίνακα $\tilde{A}$ και επομένως (υπολογίζοντας κατάλληλες ορίζουσες των A, $\tilde{A}$ κ.ο.κ.), αναγνωρίστε τις τετραγωνικές καμπύλες στον *αφινικό χώρο* που προκύπτουν. Δώστε την *αφινική κανονική τους μορφή.*

$$q_1(x,y) = 2x^2 + 5xy - 3x - 4y + 2 = 0$$
$$q_2(x,y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x - 3y + 2 = 0$$
$$q_3(x,y) = x^2 - 6xy + 9y^2 - 2 = 0$$

(β') Για τις q_1 και q_2, βρείτε κατάλληλο διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ και συντελεστή $\tilde{f}$ τέτοια ώστε η τετραγωνική εξίσωση να έχει τη μορφή

$$q_i(x,y) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \tilde{f} = 0.$$

Περιγράψτε την καμπύλη $q_2 = 0$ ως καμπύλη στο Ευκλείδειο επίπεδο: βρείτε το κέντρο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A και κάνετε το σχήμα της.

9. Θεωρούμε τρία διακριτά "σημεία" του προβολικού χώρου $\mathbf{R}P^1$, δηλαδή τρεις διακριτές ευθείες ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 στο $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ (το επίπεδο μείον το 0). Δείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε ομογενείς συνταταγμένες $[X_1 : X_2]$, $[Y_1 : Y_2]$ και $[Z_1 : Z_2]$ για τις ℓ_i, $i = 1, 2, 3$ έτσι ώστε να έχουμε

$$Z_1 = X_1 + Y_1,\ Z_2 = X_2 + Y_2.$$

Βρείτε τέτοιες συντεταγμένες για τις ευθείες $\ell_1 : -x + 2y = 0$, $\ell_2 : 2x + y = 0$ και $\ell_3 : 5x - 3y = 0$.

10. (α΄) "*Δύο διακριτές ευθείες στον προβολικό χώρο* $\mathbf{R}P^2$ *τέμνονται πάντοτε σε ένα και μοναδικό σημείο του* $\mathbf{R}P^2$" — εξηγήστε. Ισχύει αυτό στην αφινική γεωμετρία;

    (β΄) Δώστε τον ορισμό του $\mathbf{R}P^2$ ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας στον τρυπημένο χώρο $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ για σχέση ισοδυναμίας $\sim$ και δώστε τον ορισμό της σχέσης αυτής. Τί εννοούμε με *ομογενείς συντεταγμένες* $[x : y : z]$ σημείου του προβολικού χώρου;

    (γ΄) Θεωρούμε το αφινικό επίπεδο $\mathcal{A}^2$ ως το επίπεδο $\{z = 1\} \subset \mathbf{R}^3 - \{0\}$. Δώστε το σημείο τομής $P \in \mathbf{R}P^2$ των ευθειών του $\mathcal{A}^2$: $x+4y = 3$ και $2x - 5y = -7$, καθώς και το σημείο τομής $Q \in \mathbf{R}P^2$ των ευθειών του $\mathcal{A}^2$: $2x - 3y = 6$ και $-4x + 6y = 13$ (θέλουμε τις ομογενείς συντεταγμένες των P και Q).

11. (α΄) Θεωρούμε τον προβολικό χώρο $\mathbf{R}P^2$ ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του συνόλου $\mathbf{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ για τη σχέση ισοδυναμίας "*δύο σημεία είναι ισοδύναμα αν ανήκουν στην ίδια ευθεία*". Θεωρούμε αφινικό επίπεδο $\mathcal{A}^2 = \{\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta\} \subset \mathbf{R}^3$ που δεν περνά από το μηδέν. Περιγράψτε το σύνολο των στοιχείων του $\mathbf{R}P^2$ τα οποία δεν έχουν αντιπρόσωπο στο επίπεδο, δηλαδή δεν υπάρχει σημείο του $\mathcal{A}^2$ που να δίνει ομογενείς συντεταγμένες για την ευθεία/σημείο του $\mathbf{R}P^2$. Τί ερμηνεία έχουν οι ευθείες στο σύνολο αυτό;

    (β΄) Βρείτε τα σημεία του προβολικού χώρου $\mathbf{R}P^1$ που αντιστοιχούν στις τομές των παρακάτω ζευγών ευθειών στο $\mathbf{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$:

    $$2x - 5y = 3 \quad \text{και} \quad -3x + 2y = 1$$

    και

    $$2x - y = -2 \quad \text{και} \quad -6x + 3y = 7.$$

12. Δείξτε ότι η συνάρτηση $q : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

    $$q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = q((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 2x_3y_3$$

    ορίζει εσωτερικό γινόμενο $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >_q = q(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ στο ΔΧ $\mathbf{R}^3$. Δώστε τη συνάρτηση μέτρου που ορίζει και περιγράψτε το σύνολο $||\mathbf{u}||_q = 2$ διανυσμάτων σταθερού μέτρου. Τέλος, δώστε την εξίσωση του επιπέδου που

ορίζεται ως το σύνολο των διανυσμάτων που είναι κάθετα, ως προς αυτό το εσωτ. γιν., στο $(1, 1, 1)$.

13. (α') Δίνεται η τετραγωνική μορφή στο χώρο

$$q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy + 2yz.$$

Δείξτε ότι είναι θετικά ορισμένη και δώστε τη συνάρτηση μέτρου που ορίζει στο $\mathbf{R}^3$. Ισχυριζόμαστε ότι η μορφή αυτή προκύπτει από εσωτερικό γινόμενο $< .,. >$ στο $\mathbf{R}^3$. Δώστε ταυτότητα η οποία να εκφράζει το εσωτερικό γινόμενο μέσω της τετραγωνικής μορφής και επομένως (ή με άλλον τρόπο) δώστε το εσωτερικό γινόμενο $< .,. >$

(β') Διατυπώστε την ανισότητα των Cauchy-Schwarz και δώστε μία απόδειξή της.

14. (α') Δείξτε ότι σε Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο E^n ισχύουν οι ανισώσεις:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq ||\mathbf{v}||\,||\mathbf{v}||, \quad |\,||\mathbf{v}|| - ||\mathbf{u}||\,| \leq ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||.$$

(β') Για ποιές τιμές της σταθεράς C ορίζεται εσωτερικό γινόμενο $< \mathbf{u}, \mathbf{u} >_Q = \mathbf{u} \cdot Q\mathbf{v}$ στο $\mathbf{R}^3$ από τον πίνακα

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & C & -1 \\ C & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Δώστε την εξίσωση του συνόλου των διανυσμάτων που είναι κάθετα στο $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ ως προς το εσωτερικό αυτό γινόμενο.