Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων,
Τμημα Μαθηματικων, Τομεας Γεωμετριας

Διαφορικές Μορφές

Πρώτη Εργασία, 2019-20

Διανυσματική Ανάλυση και Διαφορικές Μορφές στο R^3

Η πρώτη αυτή εργασία επεξεργάζεται την επαναδιατύπωση μεγάλου μέρους της *Διανυσματικής Ανάλυσης* μέσω διαφορικών μορφών στον χώρο. Επομένως, θα περνάμε ελεύθερα από διανυσματικά πεδία σε μορφές, αναφέροντας απλά αν πρόκειται για ΔΠ πρώτου ή δεύτερου τύπου (δηλαδή που αντιστοιχεί σε 1– ή 2–μορφή):

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz \longleftarrow \mathbf{F} = P\,e_1 + Q\,e_2 + R\,e_3 \longrightarrow P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy.$$

Ο χώρος $\mathbf{R}^3$ θεωρείται ως ΔΧ με την συνήθη διατεταγμένη βάση

$$\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3),$$

εκτός αν χρειαστεί να υποθέσουμε άλλη επιλογή βάσης. Δεν υποθέτουμε ότι έχει επιλεχθεί εσωτερικό γινόμενο! Τα στοιχεία του $\mathbf{R}^3$ θα τα λέμε **σημεία**, σε αντιδιαστολή με **διανύσματα**, τα οποία είναι στοιχεία ενός $\mathbf{R}^3$ προσαρτημένου σε κάθε σημείο. Θεωρούμε δηλαδή το Καρτεσιανό γινόμενο $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ με στοιχεία ζεύγη $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Η βάση είναι η ίδια και στα δύο μέρη του γινομένου.

Θα είναι χρήσιμος ο παρακάτω πρωτότυπος συμβολισμός. Ένα σημείο του $\mathbf{R}^3$ γράφεται

$$\mathbf{r} = x_1\,e_1 + x_2\,e_2 + x_3\,e_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\mathbf{x}.$$

(Σκεφτόμαστε δηλαδή ότι τα διανύσματα βάσης δίνουν κάτι σαν έναν 3×3 πίνακα.) Έτσι, αν $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ είναι κάποια άλλη βάση, με

$$b_i = \sum_{j=1}^{3} u_{ji} e_j,$$

γράφουμε $\boxed{\mathcal{B} = \mathcal{E}U}$, όπου ο πίνακας $U = (u_{ij})$ και έτσι η αλλαγή βάσης δίνει

$$\mathbf{r} = \mathcal{E}\mathbf{x} = \mathcal{B}\mathbf{y} = (\mathcal{E}U)\mathbf{y} = \mathcal{E}(U\mathbf{y}),$$

οπότε η γραμμική αλλαγή μεταβλητών στις νέες συντεταγμένες y_1, y_2, y_3 είναι $\boxed{\mathbf{x} = U\mathbf{y}}$. *(Παρατηρήστε την διαφορετική θέση του πίνακα αλλαγής βάσης σε σχέση με το παλιό και νέο αντικείμενο: για αλλαγή βάσης $\mathcal{B} = \mathcal{E}U$, ενώ για αλλαγή συντεταγμένων $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$.)*

1. *Αλλαγή βάσης και 1-μορφές:* Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι **η κλίση βαθμωτού πεδίου στον χώρο είναι διαφορική 1–μορφή και όχι διανυσματικό πεδίο.**

   Δίνεται λεία συνάρτηση $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Εάν $\mathbf{r}(t)$ είναι καμπύλη ορισμένη σε διάστημα $I \ni 0$, με $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ και αρχική ταχύτητα $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)|_{t=0} = \mathbf{v}$, υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής της f κατά μήκος της καμπύλης στο $t = 0$, δηλαδή το $\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))|_{t=0}$. Αυτή είναι έννοια που σχεδόν συμπίπτει με την κλασική παράγωγο κατά κατεύθυνση και ισούται με

$$df(\mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{r}_0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{r}_0)\, v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{r}_0)\, v_3.$$

   Εάν τώρα θεωρήσουμε νέο σύστημα συντεταγμένων ως προς βάση $\mathcal{B}$, με την αλλαγή μεταβλητών να δίνεται, όπως πιο πάνω, από $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$, δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής της $\tilde{f}(y_1, y_2, y_3)$ πάνω στην καμπύλη στο $t = 0$,

$$d\tilde{f}(\mathbf{w}) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1}(\mathbf{r}_0)\, w_1 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_2}(\mathbf{r}_0)\, w_2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_3}(\mathbf{r}_0)\, w_3$$

   είναι ίσος με το προηγούμενο, όπου γράψαμε $\mathbf{w} = U^{-1}\mathbf{v}$.

   Εάν τώρα είχαμε επιλέξει ένα εσωτερικό γινόμενο $< .,. >$, π.χ. το σύνηθες, η τιμή του γινομένου $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ στις νέες συντεταγμένες, με $\mathbf{u} = U\mathbf{w}$, $\mathbf{v} = U\mathbf{z}$ θα ήταν $\mathbf{w} \cdot U^T U\mathbf{z}$.

   Είναι επομένως δικαιολογημένο να γράφουμε την παράγωγο κατά κατεύθυνση ως $df(\mathbf{v})$, αντί του κλασικού $\nabla f \cdot \mathbf{v}$, το οποίο μόλις δείξαμε ότι είναι λάθος!

   Σχολιάστε και την ακόλουθη, πιο άμεση *γεωμετρική* ερμηνεία: μία 1–μορφή σε ένα σημείο του χώρου είναι απλά μιά γραμμική απεικόνιση $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Έτσι, για μη-μηδενική μορφή, οι αντίστροφες εικόνες είναι επίπεδα, όλα παράλληλα μεταξύ τους. Η τιμή για ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$ εξαρτάται από το επίπεδο στο οποίο ανήκει, και επομένως είναι τελείως ανεξάρτητη της επιλογής βάσης.

Υπενθυμίζουμε ότι στο $\mathbf{R}^3$ έχουμε ορίσει τις σταθερές 1–μορφές dx, dy, dz ως τα διαφορικά των συναρτήσεων των συντεταγμένων ως προς την συνήθη βάση $\mathcal{E}$, π.χ. $x : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \mathbf{r} \mapsto x(\mathbf{r}) = x$. Βεβαιωθείτε ότι έχετε κατανοήσει την ερμηνεία αυτή, που απαλλάσσει αυτά τα κλασικά διαφορικά από οποιανδήποτε ασάφεια.

2. *Διαφορικό* d

   (α΄) Δείξτε ότι για ΔΜ οποιασδήποτε τάξης, το διπλό διαφορικό είναι μηδενικό, $d^2 = 0$.

   (β΄) Αντιστοιχίζοντας ένα ΔΠ $\mathbf{F}$ με διαφορική μορφή πρώτης και δεύτερης τάξης, επαληθεύστε ότι παίρνουμε την κλασική περιστροφή και την απόκλιση του ΔΠ και επαληθεύστε τον μηδενισμό του διπλού διαφορικού.

   Διαφορική μορφή με μηδενικό d λέγεται **κλειστή**, ενώ εάν μία μορφή γράφεται ως παράγωγος άλλης, λέμε ότι είναι **ακριβής**. Δείξαμε ότι κάθε ακριβής μορφή είναι κλειστή. Το αντίστροφο είναι το περιεχόμενο της θεωρίας συνομολογίας de Rham, όπως αναφέραμε.

3. *Εξωτερικό γινόμενο*

   (α΄) Δείξτε ότι το τετράγωνο κάθε 1–ΔΜ είναι μηδενικό, δηλαδή $\alpha \wedge \alpha = 0$

(β΄) Δείξτε ότι στον ΔΧ των σταθερών ΔΜ πρώτης τάξης, οι 1–μορφές $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες εάν και μόνο εάν

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0.$$

4. Δείξτε ότι κάθε 1–ΔΜ της μορφής

$$\alpha = f(x)\,dx + g(y)\,dy + h(z)\,dz$$

με τις λείες συναρτήσεις f, g, h να ορίζονται παντού, είναι κλειστή και βρείτε συνάρτηση δυναμικού της.

Ορίσαμε pairings ΔΜ με γεωμετρικά αντικείμενα: για α 1–μορφή και γ καμπύλη, γράφουμε

$$< \alpha, \gamma >= \int_\gamma \alpha,$$

ενώ για 2–μορφή ω και προσανατολισμένη επιφάνεια Σ,

$$< \omega, \Sigma >= \iint_\Sigma \omega.$$

(Αγνοούμε κάποια σοβαρά προβλήματα, υποθέτοντας ότι τα ολοκληρώματα υπάρχουν.)

Τα pairings αυτά είναι γραμμικά στον πρώτο παράγοντα και αθροιστικά στον δεύτερο (δηλαδή επιτρέπουμε γραμμικούς συνδυασμούς επιφανειών με ακέραιους συντελεστές.)

5. Θα υπολογίσουμε την ομολογία de Rham υποσυνόλων του $\mathbf{R}^3$ τα οποία είναι τοπολογικά απλά, και λέγονται αστροειδή (star-shaped). Ένα υποσύνολο $\mathcal{U} \subset \mathbf{R}^3$ είναι αστροειδές εάν υπάρχει σημείο του $\mathbf{r}_0$ τέτοιο ώστε για κάθε άλλο σημείο $\mathbf{r}$ το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει είναι εξ ολοκλήρου στο $\mathcal{U}$. Ένα τέτοιο $\mathcal{U}$ δεν είναι απαραίτητα κυρτό, αλλά κυρτά υποσύνολα είναι προφανώς και αστροειδή.

   Έστω $\mathbf{F} : \mathcal{U} \to \mathbf{R}^3$ λείο διανυσματικό πεδίο, με $\mathcal{U}$ ανοικτό και αστροειδές ως προς το $\mathbf{0}$ (χωρίς απώλεια γενικότητας, μετατοπίζοντας κατάλληλα). Θα δείξουμε ότι οι διανυσματικοί χώροι συνομολογίας σε διάσταση ένα και δύο είναι μηδενικοί με κλασικό τρόπο, θεωρώντας πεδία αντί διαφορικών μορφών. Δείξτε λοιπόν ότι:

   (α΄) Εάν το $\mathbf{F}$ είναι αστρόβιλο, τότε υπάρχει συνάρτηση δυναμικού $\phi : U \to \mathbf{R}$ για το $\mathbf{F}$, δηλαδή με $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

   (β΄) Εάν το $\mathbf{F}$ είναι ασυμπίεστο, τότε υπάρχει διανυσματικό δυναμικό για το $\mathbf{F}$, δηλαδή ΔΠ $\mathbf{G} : U \to \mathbf{R}$ με $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

   Και στις δύο περιπτώσεις, για κάθε $\mathbf{r} \in U$, χρησιμοποιήστε το μονοπάτι από το $\mathbf{0}$ στο $\mathbf{r}$: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{r}$. Στην πρώτη περίπτωση υπολογίστε το κατάλληλο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για να ορίσετε την συνάρτηση δυναμικού ϕ. Στην δεύτερη περίπτωση, ορίζουμε το ΔΠ $\mathbf{G}$ ως εξής:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \int_0^1 \mathbf{F}(t\mathbf{r}) \times (t\mathbf{r})\,dt.$$

6. Προσδιορίστε την έλλειψη μοναδικότητας για βαθμωτά και διανυσματικά δυναμικά (εφόσον υπάρχουν). Δώστε κάποια παραδείγματα.

7. Κάθε 3–ΔΜ β στον χώρο $\mathbf{R}^3$ είναι κλειστή (γιατί;). Εάν το πεδίο ορισμού της είναι όλο το $\mathbf{R}^3$, ή αστροειδές υποσύνολο, μπορούμε πάντα να βρούμε 2–μορφή ω με $\beta = d\omega$; (με κλασικούς όρους, θέλουμε να βρούμε ΔΠ τέτοιο ώστε η απόκλισή του να συμπίπτει με δοθείσα συνάρτηση.) Εξετάστε την έλλειψη μοναδικότητας.

8. (α΄) Δείξτε ότι η διαφορική 1–μορφή

$$\alpha_i = \frac{(y-y_i)}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}dx + \frac{-(x-x_i)}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}dy + 0dz$$

είναι *κλειστή*, δηλαδή $d\alpha_i$, και αναγνωρίστε το πεδίο ορισμού της, $\mathcal{U}$.

(β΄) Βρείτε την τιμή του $< \alpha_i, \gamma_i >$, όπου γ_i είναι κύκλος στο οριζόντιο επίπεδο: $\gamma_i : \mathbf{r}(t) = (x_0 + \cos t)e_1 + (y_0 + \sin t)e_2 + 0e_3$. Πώς θα βρούμε την τιμή της $< \alpha_i, \gamma >$ για *αυθαίρετη* κλειστή καμπύλη στο πεδίο ορισμού $\mathcal{U}$;

(γ΄) Με βάση τα παραπάνω, βρείτε κατάλληλες 1–ΔΜ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ με αντίστοιχα πεδία ορισμού $\mathcal{U}_i$, τέτοιες ώστε η τιμή του

$$< (c_1\alpha_1 + \ldots + c_k\alpha_k), \gamma >= \sum_{i=1}^{k} c_1\pi_i,$$

όπου $\pi_i =< \alpha_i, \gamma_i >$, με γ_i κατάλληλο κύκλο όπως στα προηγούμενα.

9. Θεωρούμε το ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\mathbf{R}^3 \setminus S$, όπου

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ z = 0\}$$

είναι ο μοναδιαίος κύκλος στο οριζόντιο επίπεδο.

Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \setminus S \to \mathbf{R}^3$, όπου

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{z^2 + (x^2+y^2-1)^2}(-2xz\,\mathbf{i} - 2yz\,\mathbf{j} + (x^2+y^2-1)\,\mathbf{k}).$$

(α΄) Δείξτε ότι είναι αστρόβιλο, δηλαδή ότι $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

(β΄) Δείξτε ότι δεν ορίζεται συνάρτηση δυναμικού $f : \mathbf{R}^3 \setminus S \to \mathbf{R}$ τέτοια ώστε το $\mathbf{F}$ να είναι το πεδίο κλίσης του, $\mathbf{F} = \nabla f$, ως εξής: θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3 \ t \mapsto \mathbf{r}(t) = \sqrt{1+\cos t}\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{k}$ στο κάθετο επίπεδο xz. Ο κύκλος αυτός ανήκει στο Π.Ο. του $\mathbf{F}$ (γιατί;) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ και δείξτε επομένως γιατί δεν ορίζεται συνάρτηση δυναμικού. Τί συμπεραίνετε για την τοπολογία του συνόλου $\mathbf{R}^3 \setminus S$ και τί εικάζετε για την συνομολογία de Rham και σε ποιά διάσταση;

(γ΄) Θεωρούμε τώρα το ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbf{R}^3 \setminus S$ που είναι ο κύλινδρος $\{x^2+y^2 < 1\}$. Δείξτε ότι ορίζεται συνάρτηση δυναμικού f για το $\mathbf{F}$ στο σύνολο U και βρείτε την μορφή της συνάρτηση αυτής στο U. *(Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι το πεδίο* $\mathbf{F}$ *είναι κάθετο στον ανοικτό δίσκο* $\{x^2+y^2 < 1, z = 0\}$ *και ολοκληρώστε από το 0 ακτινικά σε σημείο του δίσκου, και μετά κατά μήκος κάθετης ευθείας.)*

ΕΚ, 8/3/2020