Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικη Τοπολογια

Δεύτερη Εργασία

1. Εάν $p : \tilde{X} \to X$ είναι χώρος κάλυψης του X, τότε η προβολή p είναι *ανοικτή απεικόνιση*, δηλαδή για κάθε ανοικτό $\tilde{U} \subset \tilde{X}$, η εικόνα του, $p(\tilde{U})$, είναι ανοικτή στο X.

2. Δώστε *όλους* τους χώρους κάλυψης του τόρου T^2 (με προσέγγιση ισοδυναμίας φυσικά) και δώστε κάποιος χώρους κάλυψης του χώρου $S^2 \vee S^1$ (ένα κοινό σημείο).

3. Αποφασίστε εάν οι παρακάτω απεικονίσεις έχουν ανύψωση στον αντίστοιχο χώρο κάλυψης

   (α΄) Η $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^5$, για τον καθολικό ΧΚ $\mathbf{R} \to S^1$.

   (β΄) Ο εγκλεισμός του $\mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}P^3$ για τον ΧΚ $S^3 \to \mathbf{R}P^3$.

4. (α΄) Δώστε την απόδειξη του παρακάτω αποτελέσματος:

   Θεώρημα. *Εάν $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ είναι χώρος κάλυψης, θεωρούμε το διακριτό σύνολο $p^{-1}(x_0)$, δηλ. την ίνα πάνω από το $x_0 \in X$. Τότε*

   i. Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ έχει μεταβατική δράση πάνω στην ίνα. Πιό αναλυτικά: κάθε στοιχείο της ομάδας, με ανύψωση, δίνει τελικό σημείο στην ίνα και με τον τρόπο αυτό παίρνουμε όλα τα σημεία της ίνας και έχουμε δράση ομάδας.

   ii. Εάν $\tilde{x_0}$ είναι τυχαίο σημείο της ίνας, τότε τα στοιχεά της $\pi_1(X, x_0)$ που αφήνουν αναλλοίωτο το $\tilde{x_0}$ είναι ακριβώς τα στοιχεία της υπο-ομάδας $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$.

   iii. Έχουμε έτσι τελικά ότι

   $$\operatorname{card}\left(p^{-1}(x_0)\right) = [\pi_1(X, x_0) : p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})].$$

   (β΄) Δείξτε ότι εάν $\tilde{X} \to X$ είναι ΧΚ με p στρώματα, όπου p πρώτος και επιπλέον ο $\tilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός, τότε $\pi_1(X) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

5. Θεωρούμε αλυσιδωτό σύμπλοκο V_* *διανυσματικών χώρων* πεπερασμένης διάστασης (αντί πεπερ. παραγόμενων αβελιανών ομάδων —το αποτέλεσμα γενικεύεται, αλλά η περίπτωση που δίνουμε είναι πιο απλή και άμεση),

   $$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} \dots \xrightarrow{T_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \longrightarrow 0.$$

   Έχουμε δηλαδή $T_{i+1} \circ T_i = 0$. Ορίζουμε ως συνήθως ομολογία H_i σε κάθε i ($i = 1, \dots, n$) ως το πηλίκο $\ker T_i / \operatorname{im} T_{i-1}$. Δείξτε ότι έχουμε

   $$\sum_i (-1)^i \dim H_i(V_*) = \sum_i (-1)^i \dim V_i.$$

6. Εξηγήστε γιατί μπορούμε να "σπάσουμε" κάθε *μακρά ακριβή ακολουθία* (μ.α.α) σε μία σειρά από *βραχείες ακριβείς ακολουθίες* (β.α.α.) ως εξής: από την μ.α.α.

$$\dots \xrightarrow{f_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} C_n \xrightarrow{f_n} C_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

   έχουμε, για κάθε n, β.α.α.

$$0 \to C_{n+1}/\operatorname{im} f_{n+2} \xrightarrow{f_{n+1}} C_n \xrightarrow{f_n} \operatorname{im} f_n \to 0. \tag{1}$$

   Τί μορφή έχουμε αν το σύμπλοκο αρχίζει από το 0: $0 \to C_m \to C_{m-1} \to \dots$ στο σημείο m;

7. Δώστε το υπόλοιπο της απόδειξης ότι βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσιδωτών συμπλόκων δίνει μακρά ακριβή ακολουθία σε ομολογία. *(Θεωρούμε δεδομένο τον ορισμό του συνεκτικού ομομορφισμού και χρειάζεται μόνο να δείξετε την ακρίβεια σε κάθε σημείο.)*

8. Δείξτε ότι εάν ο υποχώρος A του X είναι παραμορφωτική σύμπτυξή του, τότε η σχετική ομολογία $H_*(X, A) = 0$.

9. Υπολογίστε την ιδιάζουσα ομολογία H_* του τόρου T^2 και της φιάλης Klein K^2 από την ακολουθία Mayer-Vietoris. *(Για την K^2 πάρετε κάθετη τομή σε δύο συμμετρικά κομμάτια, όπως υποδείξαμε στο μάθημα.)*

10. Υπολογίστε τη σχετική ιδιάζουσα ομολογία των ζευγών (X, A):

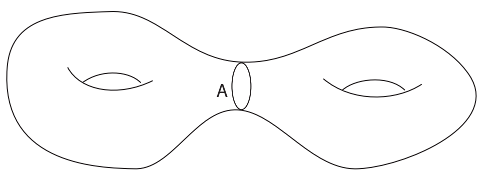
   (α΄) $X = S^n = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$, και

      i. $A =$ πεπερ. αριθμός διακριτών σημείων,

      ii. $A = S^{n-1}$ ο ισημερινός (δηλ. η σφαίρα $x_{n+1} = 0$).

   (β΄) $X = T^2$, ο τόρος και $A =$ πεπερ. αριθμός διακριτών σημείων.

   (γ΄) $X = \Sigma_2$, επιφάνεια γένους δύο και A ο κύκλος του παρακάτω σχήματος.



ΕΚ, 6-1-20