Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων,
Τομεας Γεωμετριας

Κλασικη Διαφορικη Γεωμετρια Ι

Πρώτη Εργασία, 2019-20

Προαπαιτούμενες γνώσεις και βασική προετοιμασία

Το μάθημα της **Κλασικής Διαφορικής Γεωμετρίας Ι** έπεται άλλων μαθημάτων, πάνω στα οποία είναι φυσικό να βασίζεται. Οι ασκήσεις που ακολουθούν αφορούν κάποιες από τις αναγκαίες γνώσεις από αυτά τα μαθήματα. Όπως αναφέρεται στην ιστοσελίδα της ΚΔΓ Ι, ο τρόπος που προτείνεται για να ακολουθήσετε το μάθημα περιλαμβάνει τακτική επανάληψη, και τριβή με τις καινούριες έννοιες. Έτσι υποθέτουμε ότι κάνετε μόνοι σας εξάσκηση των βασικών υπολογιστικών μεθόδων[1] και οι Ασκήσεις που ακολουθούν πηγαίνουν μερικές φορές λίγα βήματα παρα πέρα, για να σας οδηγήσουν σε πληρέστερη και βαθύτερη κατανόηση. Σε αρκετά σημεία είναι απαραίτητη η χρήση κάποιου λογισμικού για να γίνουν κατάλληλα σχήματα.

Οι βασικές έννοιες και μέθοδοι της *Γραμμικής Άλγεβρας* είναι σε συνεχή χρήση στην ΚΔΓ. Κάποια αποτελέσματα της ΓΑ που ίσως δεν έχουν καλυφθεί αναφέρθηκαν στις παραδόσεις και κάποια βρίσκονται στις ασκήσεις που ακολουθούν.

Στο μάθημα του *Λογισμού 3* δίνονται πολύ βασικά αποτελέσματα που θα χρειαστούμε (όπως τα θεωρήματα της αντίστροφης και πεπλεγμένης συνάρτησης), ενώ ο *Λογισμός 4* είναι από μιά σκοπιά μιά εισαγωγή στην ΚΔΓ και δίνει μιά πρώτη προσέγγιση, και ορισμούς, των εννοιών των καμπυλών και επιφανειών.

Από την *Αναλυτική Γεωμετρία* θεωρούνται γνωστές οι έννοιες του Αφινικού Χώρου και του Ευκλείδειου χώρου, με βασικό παράδειγμα τον χώρο $\mathbf{R}^3$ των τριάδων πραγματικών αριθμών (x, y, z) με το *κανονικό* εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ να είναι το γνωστό

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Το επίπεδο $\mathbf{R}^2$ θεωρείται συνήθως (εάν δεν κάνουμε σαφές σε μία άσκηση ότι εννοούμε κάτι διαφορετικό), ως ο οριζόντιος διανυσματικός χώρος του $\mathbf{R}^3$, δηλαδή τα σημεία $(x, y, 0)$. Θεωρούμε γνωστές τις έννοιες των αφινικών συντεταγμένων και της ισομετρίας, καθώς και τις παραμετρικές και αναλυτικές μορφές για αφινικά επίπεδα στον χώρο $\mathbf{R}^3$.

Εάν έχουμε επιλέξει την συνήθη βάση του $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ και $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, τότε γράφουμε το σημείο $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ως διάνυσμα στήλης

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

[1]Πολλές τέτοιες απλές υπολογιστικές ασκήσεις βρίσκονται στα βιβλία που έχουμε προτείνει, αλλά εύκολα φτιάχνονται και από εσάς.

Προσοχή: εάν επιλέξουμε διαφορετική βάση, τότε αλλάζει και το διάνυσμα. Έτσι, αν $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ είναι μία άλλη βάση, τότε το ίδιο σημείο είναι

$$\mathbf{r} = u\,\mathbf{b}_1 + v\,\mathbf{b}_2 + w\,\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Δείξτε ότι τα παρακάτω διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ορίζουν βάση του χώρου $\mathbf{R}^4$. Είναι του ίδιου, ή αντίθετου προσανατολισμού με την συνήθη βάση του $\mathbf{R}^4$, (e_1, e_2, e_3, e_4); Βρείτε τον 4-διάστατο όγκο που ορίζουν τα διανύσματα αυτά, και εξηγήστε γιατί είναι ακέραιος αριθμός. Διατυπώστε κατάλληλη γενίκευση του αποτελέσματος αυτού.

Εκφράστε το σύνηθες (βαθμωτό) εσωτερικό γινόμενο ως προς την βάση αυτή, ορίζοντας κατάλληλο 4×4 πίνακα.

2. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbf{R}^3$ θεωρούμε τα διανύσματα

$$\mathbf{b}_1 = (1, 3, -1), \quad \mathbf{b}_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{b}_3 = (1, 1, 2).$$

(α΄) Δείξτε ότι αποτελούν βάση $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ του $\mathbf{R}^3$.

(β΄) Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{v} = (-3, 7, 1)$ ως προς τη βάση αυτή, δηλαδή τα x_1, x_2, x_3 τέτοια ώστε $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} x_i b_i$.

(γ΄) Εφαρμόστε τη διαδικασία Gram-Schmidt στην $\mathcal{B}$ με τη διάταξη $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ για να βρείτε διατεταγμένη ορθοκανονική βάση $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ και βρείτε τις συντεταγμένες του $\mathbf{v}$ ως προς τη βάση $\mathcal{E}$.

(δ΄) Βρείτε την προβολή του $\mathbf{b}_2$ στο επίπεδο $\mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3)$.

3. **Κινούμενες βάσεις:** Έστω ότι έχουμε μία C^1 απεικόνιση $f : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, με $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ ανοικτά μη-κενά υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$, η οποία είναι 1:1, επί και με C^1 αντίστροφη $f^{-1} : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$. Η Ιακωβιανή παράγωγος $Df(\mathbf{x})$ σε κάθε σημείο του $\mathcal{D}$ είναι ο $n \times n$ πίνακας των παραγώγων πρώτης τάξης. Καθώς έχουμε $f^{-1}f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, παραγωγίζοντας, έχουμε ότι ο Ιακωβιανός πίνακας είναι *αντιστρέψιμος*, με αντίστροφο τον $(DF(\mathbf{x})))^{-1} = Df^{-1}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$, όπου $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Σε μία διάσταση, αυτό δίνει τη γνωστή σχέση μεταξύ της παραγώγου συνάρτησης και της αντιστρόφου της $\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = 1/\frac{df}{dx}(x_0)$ (με $y_0 = f(x_0)$).

Θεωρούμε τα καρτεσιανά γινόμενα $\mathcal{D} \times \mathbf{R}^n$ και $\mathcal{E} \times \mathbf{R}^n$, ώστε να μπορούμε να αναφερόμαστε σε διανύσματα στους ΔΧ $\{\mathbf{x}\} \times \mathbf{R}^n$ και $\{\mathbf{y}\} \times \mathbf{R}^n$ οι οποίοι είναι μετατοπισμένοι $\mathbf{R}^n$ στα σημεία $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ αντίστοιχα (για κάθε επιλογή σημείων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$). Δείξτε ότι σε κάθε σημείο του συνόλου $\mathcal{E}$ ορίζεται διατεταγμένη βάση του $\mathbf{R}^n$ ως οι n στήλες του Ιακωβιανού πίνακα. Καθώς έχουμε βάση σε κάθε σημείο και αυτή μεταβάλλεται, λέμε ότι έχουμε *κινούμενη βάση* του $\mathbf{R}^n$.

Οι γνωστές μας πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο κρύβουν αρκετά μυστικά και δίνουν ένα απλό, αλλά σημαντικό παράδειγμα διαφοράς μεταξύ τοπικά και ολικά αντιστρέψιμης συνάρτησης. Το κλειδί βρίσκεται στις δυσκολίες του ορισμού *γωνίας*.

4. **Πολικές συντεταγμένες:** Θεωρούμε το ανοικτό ημι-επίπεδο

$$\mathcal{D} = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 : r > 0\}$$

και ορίζουμε απεικόνιση

$$\phi : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^2 : (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

(αʹ) Δείξτε ότι σε κάθε σημείο του $\mathcal{D}$ ισχύει η συνθήκη του θεωρήματος της αντίστροφης συνάρτησης και επομένως για κάθε $(r_0, \theta_0) \in \mathcal{D}$ υπάρχει γειτονιά του $\mathcal{U}$ (π.χ. ανοικτός δίσκος) τέτοιος ώστε να έχουμε 1:1, επί απεικόνιση από το $\mathcal{U}$ στην εικόνα του $\phi(\mathcal{U})$, με λεία αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή τοπική αλλαγή μεταβλητών.

Ποιά είναι η συνολική εικόνα της ϕ, $\phi(\mathcal{D})$; Περιγράψτε επίσης την εικόνα κάθε οριζόντιας ημι-ευθείας $\{(r, \theta) \in \mathcal{D} : \theta = \theta_0\}$ και κάθε κάθετης ευθείας $\{(r, \theta) \in \mathcal{D} : r = r_0\}$ και σχεδιάστε κάποια τυπικά παραδείγματά τους. Εάν $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, δώστε την αντίστροφη εικόνα του σημείου, $\phi^{-1}(x_0, y_0)$.

Εξηγήστε επομένως γιατί δεν έχουμε αλλαγή μεταβλητών σε όλο το ημι-επίπεδο $\mathcal{D}$ και τον λόγο για τον οποίο περιορίζουμε την ¨γωνία¨ θ σε διάστημα πλάτους 2π (π.χ. $0 < \theta < 2\pi$).

(βʹ) Δώστε τις εικόνες των συνήθων διανυσμάτων βάσης του ΕΔΧ $\mathbf{R}^2$, $(1, 0), (0, 1)$

Εφαρμόστε την παραπάνω διαδικασία και βρείτε την κινούμενη βάση που παίρνουμε από τον ορισμό πολικών συντεταγμένων (r, θ) στο επίπεδο (χρειάζεται προσοχή στον ορισμό του *πεδίου ορισμού* τους):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Κάνετε σχήμα με ενδεικτικά σημεία του επιπέδου και τις αντίστοιχες βάσεις.

5. Δώστε τον πίνακα A της γραμμικής απεικόνισης $p \mapsto p'$ "παραγώγισης" στο Δ.Χ. πολυωνύμων βαθμού το πολύ n ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Επαληθεύστε ότι ο A^2 δίνει διπλή παραγώγιση και δείξτε ότι $A^{n+1} = 0$ (λέμε ότι ο A είναι μηδενοδύναμος).

6. Δώστε τουλάχιστον δύο διαφορετικές αποδείξεις της ανισότητας Cauchy-Schwartz και με χρήση της, δείξτε την τριγωνική ανισότητα στο $\mathbf{R}^n$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Μην ξεχάσετε να αναφερθείτε στις περιπτώσεις όπου έχουμε ισότητα.

7. **Το εξωτερικό γινόμενο στον χώρο R^3.**

Ο σκοπός του ορισμού εξωτερικού γινομένου στον χώρο (ιστορικά) είναι ώστε να μπορέσουμε να ορίσουμε την συνολική ροή διανυσματικού πεδίου στην Διανυσματική Ανάλυση.

(αʹ) Θυμίζουμε την έννοια της ροής ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ διαμέσου προσανατολισμένης επιφάνειας Σ:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

όπου ο προσανατολισμός δίνεται από το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{n}$, κάθετο στην επιφάνεια. Εξηγήστε γιατί είναι λογικό να δίνεται το στοιχείο ροής διαμέσου επιφάνειας από το $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ και σχετίστε το με τον παρακάτω ορισμό του εξωτερικού γινομενου.

(β') Ένας συνήθης τρόπος ορισμού του εξωτερικού γινομένου στο $\mathbf{R}^3$ είναι ο εξής:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \sin\theta\,\mathbf{n}.$$

Γεωμετρικά, δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα δύο διανύσματα (γιατί;), αλλά δεν εξηγεί την παρουσία του δισκάθετου $\mathbf{n}$. Εξηγήστε γιατί κάθε ένας από τους τέσσερεις όρους του δεξιού μέλους ($\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\|, \sin\theta, \mathbf{n}$), εξαρτάται από την ύπαρξη του σύνηθους εσωτερικού γινομένου στο $\mathbf{R}^3$.

(γ') Παρ' όλη αυτή την εξάρτηση από το ΕΓ, παρατηρούμε ότι η τιμή του εξωτερικού γινομένου εξαρτάται από το *εμβαδόν* και όχι από τα μέτρα των διανυσμάτων, ή την γωνία μεταξύ τους, με την έννοια ότι:

$$(a)\,(k\mathbf{u}) \times (\mathbf{v}/k) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \quad \forall k \neq 0$$

$$(b)\,(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Δώστε πλήρη γεωμετρική εξήγηση των παραπάνω.

Βρείτε το σύνολο όλων των ζευγών διανυσμάτων που δίνουν το ίδιο εμβαδόν με τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.

(δ') Ένας καλύτερος τρόπος να προχωρήσουμε είναι να δεχθούμε ότι το εμβαδόν των τετραγώνων που ορίζουν ανά δύο τα διανύσματα της συνήθους βάσης είναι ίσα με ένα και οι προσανατολισμοί είναι αυτοί που διατηρούν τον προσανατολισμό της βάσης ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$). Έτσι, ορίζουμε τα στοιχειώδη εξωτερικά γινόμενα:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k},\ \ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i},\ \ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

και επεκτείνουμε τον ορισμό υποθέτοντας ότι, ως συνάρτηση εμβαδού με προσανατολισμό, το εξωτερικό γινόμενο είναι αντι-συμμετρικό και διγραμμικό (γραμμικό σε κάθε όρο). Δείξτε ότι οδηγούμαστε στον συνήθη ορισμό του εξωτερικού γινομένου ως προς την συνήθη βάση. Ο ορισμός αυτός είναι προτιμότερος, καθώς δεν αναφέρει πουθενά το ΕΓ.

8. *Γραμμικοποίηση:* Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y) = (x^3 - xy^2, -y^3 + xy)$. Υπολογίστε την παράγωγο Df της f. Δείξτε ότι στο σημείο $(x_0, y_0) = (2,2)$ η συνάρτηση είναι τοπικά αντιστρέψιμη.

   Συγκρίνετε την ακριβή τιμή του διανύσματος διαφοράς $f(2.2, 1.8) - f(2,2)$ με την προσεγγιστική τιμή που δίνει η γραμμικοποίηση:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \simeq Df(x_0,y_0) \left[\begin{array}{c} x - x_0 \\ y - y_0 \end{array} \right],$$

   εδώ:

$$(x,y) = (2.2, 1.8),\ (x_0,y_0) = (2,2).$$

Στον ΔΧ $\mathbf{R}^3$ υπάρχουν άπειρες άλλες επιλογές *εσωτερικού γινομένου*, εκτός του κανονικού που έχουμε αναφέρει. Το γενικό εσωτερικό γινόμενο το γράφουμε με αγκύλες: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

9. Δώστε αποδείξεις όσων από τα παρακάτω δεν έχετε συναντήσει:

   (α΄) Οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού τετραγωνικού πίνακα είναι όλες πραγματικές.

   (β΄) Ο συμμετρικός τετραγωνικός Q λέγεται **θετικά ορισμένος** εάν για κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \neq 0$, η τιμή της τετραγωνικής συνάρτησης $q(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot Q\mathbf{v}$ είναι θετική. Ισοδύναμες συνθήκες είναι: (α) όλες οι ιδιοτιμές του Q είναι θετικές και (β) όλες οι κύριες ελάσσονες ορίζουσες του Q είναι θετικές.

   Κατόπιν, δείξτε ότι ορίζεται μέσω του Q *εσωτερικό γινόμενο* στο $\mathbf{R}^n$ ως εξής:

   $$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >_Q = \mathbf{u} \cdot Q\mathbf{v},$$

   όπου $\cdot$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Τέλος, δείξτε ότι ο πίνακας

   $$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   είναι θετικά ορισμένος και βρείτε διάνυσμα $\mathbf{v}$ ορθογώνιο στο $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ ως προς το νέο αυτό εσωτερικό γινόμενο.

10. (α΄) Δείξτε ότι η συνάρτηση

    $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3y_1y_2 + 2y_1z_2 + 2z_1y_2 + 5z_1z_2$$

    ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbf{R}^3$.

    (β΄) Δώστε τη συνάρτηση μέτρου που δίνει το γινόμενο αυτό. Βρείτε το μέτρο του διανύσματος $(3, 3, -2)$ καθώς και την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο διάνυσμα αυτό, ως προς το εσωτερικό γινόμενο αυτό.

11. (α΄) Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

    $$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

    όπου $a, b, c \in \mathbf{R}$ και δείξτε επομένως ότι για a, b, c διακριτές τιμές, τα τρία διανύσματα σειράς αποτελούν βάση του $\mathbf{R}^3$.

    (β΄) Βρείτε δέκα διανύσματα του χώρου $\mathbf{R}^3$ τέτοια ώστε οποιαδήποτε επιλογή τριών από αυτά δίνει βάση.

12. Θεωρούμε απεικόνιση $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 : (x, y) \mapsto (z, w) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

    (α΄) Δείξτε ότι δίνει *τοπικά* διαφορομορφισμό κοντά σε κάθε σημείο $(x, y) \neq (0, 0)$ και ότι η κινούμενη βάση που παίρνουμε ως εικόνες της συνήθους βάσης από τον πίνακα παραγώγου είναι ορθογώνια, και διατηρεί τον προσανατολισμό της βάσης.

    (β΄) Δείξτε ότι ζεύγη μη-μηδενικών σημείων (x, y) και $(-x, -y)$ δίνουν ίδια εικόνα και, επομένως, περιορίζοντας την συνάρτηση στο άνω ημιεπίπεδο $\{y > 0\}$ έχουμε *ολικό διαφορομορφισμό* με την εικόνα, δηλαδή έχουμε *αλλαγή μεταβλητών*. Υπάρχει αναλυτική μορφή της αντίστροφης συνάρτησης;

(γ') Εξηγήστε γεωμετρικά τους λόγους που δεν έχουμε αλλαγή μεταβλήτων ορισμένη σε όλο το σύνολο $\mathbf{R}^2 - \{0\}$, παρότι τοπικά η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη (έχουμε δηλαδή συνάρτηση $f : \mathbf{R}^2 - \{0\} \to \mathbf{R}^2 - \{0\}$ που είναι επί και τοπικά 1:1, αλλά δεν είναι ολικά αντιστρέψιμη) .

ΕΚ, 21/10/2019