Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων,
Τομεας Γεωμετριας

# Διαφορικες Μορφες

**Πρώτη Εργασία**, 2018-19

## Πολλαπλότητες

1. Κάνετε τις εξής ασκήσεις του Κεφαλαίου 4 του βιβλίου του Mcinerney, "First steps in differential geometry": 4.1, 4.5, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 (και όποιες άλλες επιπλέον επιθυμείτε).

2. Θεωρούμε το ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\mathbf{R}^3 \setminus S$, όπου

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

είναι ο μοναδιαίος κύκλος στο οριζόντιο επίπεδο.

Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \setminus S \to \mathbf{R}^3$, όπου

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}(-2xz\,\mathbf{i} - 2yz\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2 - 1)\,\mathbf{k}).$$

(α') Δείξτε ότι είναι αστρόβιλο, δηλαδή ότι $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

(β') Δείξτε ότι δεν ορίζεται συνάρτηση δυναμικού $f : \mathbf{R}^3 \setminus S \to \mathbf{R}$ τέτοια ώστε το $\mathbf{F}$ να είναι το πεδίο κλίσης του, $\mathbf{F} = \nabla f$, ως εξής: θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$ $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{k}$ στο κάθετο επίπεδο $xz$. Ο κύκλος αυτός ανήκει στο Π.Ο. του $\mathbf{F}$ (γιατί;) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ και δείξτε επομένως γιατί δεν ορίζεται συνάρτηση δυναμικού. Τί συμπεραίνετε για την τοπολογία του συνόλου $\mathbf{R}^3 \setminus S$ και τί εικάζετε για την συνομολογία de Rham και σε ποιά διάσταση;

(γ') Θεωρούμε τώρα το ανοικτό υποσύνολο $U$ του $\mathbf{R}^3 \setminus S$ που είναι η ένωση του ανοικτού κυλίνδρου $\{x^2+y^2 < 1\}$ και των δύο ανοικτών ημιχώρων $\{z \neq 0\}$. Δείξτε ότι ορίζεται συνάρτηση δυναμικού $f$ για το $\mathbf{F}$ στο σύνολο $U$ και βρείτε την μορφή της συνάρτηση αυτής στο εσωτερικό του κυλίνδρου. *(Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι σταθερό στον ανοικτό δίσκο $\{x^2+y^2 < 1, z = 0\}$ και ολοκληρώστε κατά μήκος καθέτων ευθειών.)*

3. (α') Δείξτε ότι ο ορισμός εφαπτόμενου διανύσματος σε σημείο $p \in M^n$ πολλαπλότητας, μέσω κλάσεων ισοδυναμίας καμπυλών που περνούν από το $p$ είναι ανεξάρτητος του χάρτη που επιλέγουμε.

(β') Στο ίδιο πλαίσιο, δείξτε ότι παίρνουμε διανυσματικό χώρο $n$ διαστάσεων.

4. Δείξτε ότι η εφαπτόμενη δέσμη $TM$ κάθε πολλαπλότητας $M^n$, θεωρούμενη ως πολλαπλότητα διάστασης $2n$ είναι πάντοτε προσανατολίσιμη. *(Υπόδειξη: είναι γνωστό ότι*

*έχουμε εξ ορισμού χάρτες* $(U, \phi)$ *της πολλαπλότητας* $M$ *όπου η εφαπτόμενη δέσμη είναι τετριμμένη, δηλαδή*

$$TM|_U \cong U \times \mathbf{R}^n.$$

*Εξετάστε λοιπόν τον τρόπο που εμφανίζονται οι αλλαγές χαρτών για την* $TM$*.)*

ΕΚ, 25/3/2019