ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ
Δεύτερη Εργασία, 2018-2019

1. Δώστε δύο διαφορετικά παραδείγματα συστημάτων στο επίπεδο με σημείο ισορροπίας στο $(0,0)$ το οποίο ενώ έχει γειτονιά $N_\epsilon(0)$ τέτοια ώστε $x \in N_\epsilon(0) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \phi(x,t) = 0$, δεν είναι ευσταθές κατά Lyapunov. Εξηγήστε γιατί τέτοια παραδείγματα είναι κατ΄ ανάγκην μη-γραμμικά.

2. *Επιχειρήματα γενικότητας* [δηλαδή θα υποθέτετε, κάθε φορά όπου χρειάζεται, ότι η τιμή της συνάρτησης που θεωρείτε είναι *κανονική*. Οι διατυπώσεις περιλαμβάνουν λοιπόν εκφράσεις όπως "γενικά", "τυπικά" κλπ με ταυτόσημη ερμηνεία.]

   (α΄) Τί σύνολο είναι, γενικά, το σύνολο των σημείων όπου δύο τυπικά διανυσματικά πεδία στο χώρο $\mathbf{R}^3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα;

   (β΄) Τί είναι, γενικά, το υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$ όπου τρία γενικά διανυσματικά πεδία είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

   (γ΄) Τί μπορείτε να πείτε για το σύνολο του $\mathbf{R}^3$ σημείων όπου το ανάπτυγμα τεσσάρων γενικών Δ.Π. είναι όλος ο εφαπτόμενος χώρος;

   (δ΄) Εφαρμόστε τα παραπάνω για την περίπτωση όπου ξεκινάμε με δύο Δ.Π. $X, Y \in \mathcal{X}^\infty(\mathbf{R}^3)$, το τρίτο Δ.Π. είναι η αγκύλη τους $[X,Y]$ και το τέταρτο κάποια επαναλαμβανόμενη αγκύλη.

   (ε΄) Τέλος, βρείτε συγκεκριμένα Δ.Π. για τα οποία ισχύουν όλα αυτά που ισχυριστήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

3. *Το σύστημα του Duffing:* Το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -\zeta y + x - x^3, \quad \zeta \geq 0 \end{array} \right.$$

   στο επίπεδο είναι η κανονική μορφή της αυτόνομης Δ.Ε.

$$\ddot{x} + \zeta \dot{x} + x^3 - x = 0.$$

   Περιγράφει ένα σύστημα με απόσβεση που κινείται σε συμμετρικό δυναμικό με δύο ελάχιστα (γιατί;)

   (α΄) Θα μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση $\zeta = 0$. Το σύστημα είναι συντηρητικό (Χαμιλτονιανό), της μορφής $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\nabla U(x)$. Επαληθεύστε ότι ισχύει αυτό, δώστε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση $H(x,y)$ και το διάγραμμα ροής (πορτρέτο κίνησης ή φάσεων).

(β΄) Τώρα περνάμε στην περίπτωση $\zeta > 0$. Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την (τοπική) τους συμπεριφορά. Δείξτε ότι, κατάλληλα μετατοπισμένη, η H είναι συνάρτηση Lyapunov για κάθε ένα από τα δύο σημεία ισορροπίας που είναι ευσταθή. Δώστε το ακριβές σύνολο όπου ισχύει η συνάρτηση Lyapunov και εξηγήστε γιατί αποτελεί υποσύνολο της περιοχής έλξης κάθε Σ.Ι. Δείξτε ότι εάν *τρέξουμε* τα σύνολα αυτά προς τα πίσω (σε αρνητικό χρόνο) θα πάρουμε τη συνολική περιοχή έλξης. Προσπαθήστε να δώσετε ένα διάγραμμα των περιοχών αυτών για διάφορες τιμές του ζ. Πόσες καμπύλες/τροχιές αποτελούν το διαχωριστικό σύνολο των δύο περιοχών έλξης;

4. *Οι εξισώσεις Lorenz:* Όπως είναι γνωστό το παρακάτω απλό σύστημα σε τρεις διαστάσεις που μελετήθηκε το 1963 από τον E. Lorenz παρουσιάζει ¨χαοτική συμπεριφορά¨ για κάποιες τιμές των παραμέτρων του.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \sigma(y-x) \\ \dot{y} & = & \rho x - y - xz \\ \dot{z} & = & -\beta z + xy, \quad (\sigma, \rho, \beta > 0) \end{array}\right. .$$

Προς το παρόν, θα δούμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά του.

(α΄) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του και την εξάρτησή τους από τις παραμέτρους.

(β΄) Δείξτε ότι ο κάθετος άξονας z είναι αναλλοίωτη ευθεία για το σύστημα και περιγράψτε τη δυναμική πάνω του. Επίσης, δείξτε ότι το σύστημα έχει τη συμμετρία $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$.

(γ΄) Δείξτε ότι

i. για $0 < \rho < 1$, το σημείο ισορροπίας στο 0 είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, κάνοντας χρήση της συνάρτησης Lyapunov

$$V(x, y, z) = \rho x^2 + \sigma(y^2 + z^2).$$

ii. για $\rho > 1$, το Σ.Ι. 0 έχει μονοδιάστατη ασταθή πολλαπλότητα $W^u(0)$.

5. *Το απλό εκκρεμές* είναι το σύστημα, σε κανονική μορφή,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -\alpha y - \sin x \end{array}\right. \tag{1}$$

και περιγράφει ένα απλό εκκρεμές, αλλά και τη δυναμική ενός περιστρεφόμενου σώματος γύρω από έναν άξονα.

Για μηδενική απόσβεση $\alpha = 0$ το σύστημα είναι Χαμιλτονιανό. Για θετική απόσβεση $\alpha > 0$, τα Σ.Ι. δεν μετακινούνται, αλλά αλλάζει η ευστάθειά τους.

(α΄) Δώστε τυπικά πορτρέτα κίνησης για διάφορες θετικές τιμές του α και περιγράψτε τις ποιοτικές αλλαγές στην δυναμική συμπεριφορά που παρατηρούνται.

(β΄) Εφαρμόζεται τώρα μία σταθερή ροπή T στο σύστημα, ώστε το σύστημα είναι

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -\alpha y - \sin x + T. \end{array}\right. \tag{2}$$

Τα σημεία ισορροπίας μετακινούνται.

i. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $0 < T < 1$. Με κατάλληλη αναφορά στο αντίστοιχο Χαμιλτονιανό σύστημα (δηλαδή για $\alpha = 0$, για το οποίο και κάνετε το πορτρέτο κίνησης), δείξτε πως η περιοχή έλξης παραμένει μεν σταθερή, αλλά είμαστε πολύ κοντά σε αστάθεια, καθώς το ευσταθές σημείο πλησιάζει το σάγμα και χρειάζεται μικρή ενέργεια για να βγούμε (και τί γίνεται μετά;)

ii. Δείξτε ότι για $T > 1$ δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας. Το σύστημα παρ' όλα αυτά παραμένει ευσταθές λόγω των αποσβέσεων. Δώστε το πορτρέτο κίνησης και δείξτε ότι υπάρξει **ευσταθής οριακός κύκλος** στον κύλινδρο (αυστηρή απόδειξη γίνεται με χρήση του θεωρήματος των Poincaré-Bendixson, που αν θέλετε μπορείτε να μελετήσετε στα βιβλία σας).

6. (α΄) Μελετήστε το σύστημα στο επίπεδο

$$\dot{x} = 2x - x^2, \quad \dot{y} = -y + xy.$$

Βρείτε τα ΣΙ, τον τύπο τους, καθώς και τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες καθενός από αυτά.

Η *θεωρία της δομικής ευστάθειας* λέει ότι, γενικά, κάθε ασταθής πολλαπλότητα ενός ΣΙ (ή οριακού κύκλου) τέμνει την ευσταθή πολλαπλότητα άλλου ΣΙ ή ΟΚ *εγκάρσια.*

Δείξτε ότι στο παράδειγμα αυτό η τομή δεν είναι εγκάρσια. Είναι λοιπόν φυσικό να αναμένουμε ότι μικρές διαταραχές καταστρέφουν την μη-εγκάρσια αυτή τομή. Περιγράψτε τρόπους να γίνει αυτό. *Υπόδειξη: επιλέξτε σημείο πάνω στην τροχιά που συνδέει τα ΣΙ και με χρήση του Κυτίου Ροής (Flow Box) αλλάξτε τοπικά το ΔΠ.*

(β΄) Αναγνωρίστε παρόμοιες μη-εγκάρσιες τομές αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων στις Χαμιλτονιανές περιπτώσεις των συστημάτων Duffing και απλού εκκρεμούς.

Συζητήστε κατά πόσο μπορούμε να φέρουμε τα συστήματα αυτά σε ¨γενική θέση¨, μένοντας όμως στην κατηγορία των Χαμιλτονιανών συστημάτων *(Δείτε σχετικά και την επόμενη Άσκηση.)*

7. *Χαμιλτονιανοί πίνακες:* Ο πίνακας γραμμικοποίησης σε ΣΙ Χαμιλτονιανού συστήματος στο επίπεδο,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

είναι

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \end{bmatrix},$$

και επομένως έχει μηδενικό ίχνος.

(α΄) Δείξτε ότι η γραμμικοποίηση αυτή δίνει πάντα ή κεντρο ή σάγμα (με ίσες σε απόλυτη τιμές ιδιοτιμές).

(β΄) Ένας τετραγωνικός πίνακας A διάστασης $m = 2n$ λέγεται *Χαμιλτονιανός* εάν ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\boxed{A^T J + JA = 0} \quad (*)$$

όπου J είναι ο πίνακας

$$J = \left[\begin{array}{cc} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{array} \right].$$

Δείξτε ότι κάθε τέτοιος A έχει μηδενικό ίχνος.

(γʹ) Δείξτε ότι εάν λ είναι ιδιοτιμή Χαμιλτονιανού πίνακα A, τότε και $-\lambda$ είναι ιδιοτιμή *(Υπόδειξη: χρήση της ορίζουσας ταυτότητας* $(*)$ *και θεώρηση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου* $c_A(\lambda)$*.)*

(δʹ) Βρείτε την γενική μορφή Χαμιλτονιανού πίνακα σε δύο διαστάσεις, $m = 2$, και δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του είναι ή $\lambda = \pm i\omega$ ή $\lambda_2 = -\lambda_1$.

Θεωρούμε τώρα μικρές διαταραχές του A *εντός του συνόλου των Χαμιλτονιανών πινάκων.* Δείξτε ότι εφόσον οι ιδιοτιμές είναι μη-μηδενικές, το διαταραγμένο σύστημα έχει ΣΙ του ίδιου τύπου με το αρχικό (κέντρο ή συμμετρικό σάγμα).

8. *Βέλτιστος έλεγχος και Χαμιλτονιανά συστήματα:* Συνοπτικά, εάν έχουμε αφινικό σύστημα ελέγχου

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m,$$

με $g(x)$ $n \times m$ πίνακα σταθερού βαθμού m και θεωρήσουμε συναρτησιακό κόστους με Lagrangian $L(x, u)$ (θετικά ορισμένη στο u), σχηματίζουμε την Χαμιλτονιανή

$$H(x, u, p) = (f(x) + g(x)u) \cdot p - L(x, u),$$

όπου $p \in \mathbf{R}^n$ δυϊκες μεταβλητές (¨πολλαπλασιαστές Lagrange.¨)

Η αρχή του μεγίστου (ή ελαχίστου) του Pontryagin οδηγεί στην βέλτιστη Χαμιλτονιανή

$$H^*(x, p) = \sup_u H(x, u, p).$$

Συνήθως, αυτό μας δίνει τον βέλτιστο έλεγχο ως συνάρτηση των x και p, $u^*(x, p)$.

Εάν κάποιες επιπλέον συνθήκες ισχύουν, τότε οι βέλτιστες λύσεις $(x(t), p(t))$ είναι οι τροχιές του Χαμιλτονιανού συστήματος για την συνάρτηση H^*.

(αʹ) Βρείτε τον βέλτιστο έλεγχο u^* και την H^* για γραμμικά συστήματα,

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \operatorname{rank} B = m$$

και για Lagrangian

$$L(x, u) = \frac{1}{2} x^T R x + \frac{1}{2} u^T Q u, \quad R \geq 0,\ Q > 0$$

και δώστε τις Χαμιλτονιανές του εξισώσεις (που πρέπει να είναι *γραμμικές!*)

(βʹ) Μελετήστε το σύστημα σε μία διάσταση $\dot{x} = ax + bu$ ($b \neq 0$) και βρείτε τις λύσεις (x, p) για την ασταθή περίπτωση $a > 0$.

9. Εξετάστε το ακόλουθο πρόβλημα: δίνεται γραμμικό σύστημα $\dot{x} = Ax$ στο $\mathbf{R}^n$, με το 0 ασυμπτωτικά ευσταθές. Η απλούστερη μορφή υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov για το 0 είναι

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Q x,$$

με $Q = Q^T > 0$ (θετικά ορισμένο, συμμετρικό.) Γιατί;

Δείξτε ότι πάντα υπάρχει τέτοιος Q και μάλιστα με $\frac{dV}{dt} = -x^T P x$, με P επίσης θετικά ορισμένο συμμετρικό πίνακα.

Δώστε ένα (μη-διαγώνιο!) παράδειγμα στο $\mathbf{R}^3$.

10. *Σταθεροποίηση του σαγματικού σημείου του εκκρεμούς:* Θα αναλύσουμε κάποιες μεθόδους ¨εξισορρόπησης¨ του εκκρεμούς στην κάθετη προς τα πάνω θέση (χωρίς να ισχυριζόμαστε ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην πράξη.)

Οι εξισώσεις είναι, όπως και πριν:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\alpha y - \sin x \end{cases}$$

για α θετικό και μικρό (π.χ. $\alpha = 0.3$).

(α΄) Θεωρούμε έλεγχο που επεισέρχεται στην εξίσωση για την γωνία, δηλαδή θεωρούμε την νέα πρώτη εξίσωση:

$$\dot{x} = y + u_1(x).$$

Βρείτε έλεγχο $u_1(x) = -kx + c$ ο οποίος να σταθεροποιεί το σαγματικό σημείο $(x, y) = (\pi, 0)$, δηλαδή να έχει το σημείο αυτό ως ολικό ελκυστή (ασυμπτ. ευσταθές ΣΙ). Είναι δυνατό αυτό εάν το σύστημα είναι χωρίς απώλειες (δηλ. $\alpha = 0$);

(β΄) Επαναλάβετε για έλεγχο στην γωνιακή ταχύτητα, δηλαδή με νέα δεύτερη εξίσωση:

$$\dot{y} = -\alpha y - \sin(x) + u_2(x),$$

πάλι με $u_2 = -kx + c$.

Και στις δύο περιπτώσεις, δώστε κατάλληλα πορτρέτα κίνησης του ελεγχόμενου συστήματος που επιλέξατε.

ΕΚ, 28-1-19