Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων,
Τομεας Γεωμετριας

Κλασικη Διαφορικη Γεωμετρια

Τρίτη Εργασία, 2018-19

Επιφάνειες

Εξάσκηση με βασικούς υπολογισμούς κινούμενης βάσης $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n})$*, πινάκων πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής και καμπυλοτήτων για ικανό αριθμό παραδειγμάτων από τις κατηγορίες επιφανειών που έχουμε μελετήσει (γραφήματα, εκ περιστροφής επιφάνειες, σφαίρες, κύλινδροι, ελικοειδείς, τόροι κ.ο.κ.) θεωρείται δεδομένη. Η συλλογή που ακολουθεί περιλαμβάνει κάποια υπολογιστικά, αλλά και κάποια πιο θεωρητικά αποτελέσματα, τα οποία βοηθούν την καλύτερη εμπέδωση της θεωρίας επ[ιφανειών.*

1. Η συνάρτηση $z = x^2 - y^2$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, (όπως όλες οι λείες συναρτήσεις) δίνει κανονική παραμέτρηση επιφάνειας και το γράφημα της είναι η σαγματική επιφάνεια. Δώστε το σχήμα. Θεωρούμε τώρα παραμετρήσεις:

   (α΄) Για $(u, v) \in \mathbf{R}^2$,
   $$\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} u+v \\ u-v \\ 4uv \end{bmatrix}.$$

   (β΄) Για $(u, v) \in \mathbf{R}^2 - \{u = 0\}$,
   $$\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} u\cosh(v) \\ u\sinh(v) \\ u^2 \end{bmatrix}.$$

   Δείξτε ότι είναι και οι δύο κανονικές.

   Θεωρώντας τις δύο πρώτες συναρτήσεις, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, κάθε μίας ώς απεικονίσεις από υποσύνολο του επιπέδου στο επίπεδο, δείξτε ότι έχουμε διαφορομορφισμό από το κάθε πεδίο ορισμού στην εικόνα του (δηλαδή αλλαγή συντεταγμένων).

   Δείξτε ότι και οι δύο δίνουν παραμετρήσεις της σαγματικής επιφάνειας και δώστε, σε κάθε περίπτωση, το τμήμα του γραφήματος που καλύπτουν.

2. **Ελλειψοειδές:** Θεωρούμε γενικό ελλειψοειδές με εξίσωση
   $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,\ a > b > c > 0.$$

   Επαληθεύστε ότι επιτρέπει παραμέτρηση
   $$\mathbf{r}(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} a\sin\theta\cos\phi \\ b\sin\theta\sin\phi \\ c\cos\theta \end{bmatrix},\ (\theta,\phi) \in (0,\pi)\times(0,2\pi).$$

Υπολογίστε τα εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία $\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\phi$ και το κάθετο πεδίο $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi$. Είναι τα $\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\phi$, και επομένως οι μεσημβρινοί και παράλληλοι του ελλειψοειδούς κάθετοι μεταξύ τους; Σε ποιά σημεία είναι κάθετα;

Επαληθεύστε ότι το πεδίο κλίσης της συνάρτησης $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2$ στα σημεία του ελλειψοειδούς (δηλαδή για $f(x,y,z) = 1$) είναι παράλληλο στο πεδίο $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi$. Μέσω της κλίσης, δείξτε ότι για κάθε $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία της επιφάνειας με εφαπτόμενο επίπεδο κάθετο στο $\mathbf{v}$.

3. **Ευθειογενείς επιφάνειες:** Θεωρούμε παραμετρήσεις της μορφής

$$\mathbf{r}(t,u) = \mathbf{c}(t) + u\mathbf{v}(t),$$

όπου $\mathbf{c}(t)$, $t \in I$ είναι κανονική καμπύλη στο χώρο, $u \in I' \subset \mathbf{R}$ και $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$, $\forall t$. Εδώ I, I' είναι κάποια μη-κενά, *φραγμένα* διαστήματα στο $\mathbf{R}$, με I' της μορφής $(-\delta, \delta)$. Για t σταθερό, είναι προφανές ότι έχουμε παραμέτρηση ευθείας, οπότε έχουμε μιά μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών. Η καμπύλη $\mathbf{c}$ λέγεται **διευθετούσα (directrix)** ή *οδηγός καμπύλη*. Δεν είναι σαφές ότι έχουμε κανονική παραμέτρηση επιφάνειας. Θα μελετήσουμε συνθήκες που να δίνουν κανονικότητα.

   (α΄) Το πεδίο $\mathbf{r}_u = \mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$ εξ υποθέσεως. Το πεδίο $\mathbf{r}_t(t,u) = \dot{\mathbf{c}}(t) + u\dot{\mathbf{v}}(t)$ είναι μη-μηδενικό για $u = 0$, καθώς η καμπύλη είναι κανονική. Δείξτε ότι επομένως, εάν για όλα τα t, τα διανύσματα $\dot{\mathbf{c}}(t)$ και $\mathbf{v}(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε έχουμε κανονική παραμέτρηση καμπύλης σε κάποιο υποσύνολο $I \times (-\epsilon, \epsilon)$.

   (β΄) Δείξτε ότι η επιλογή $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{c}}(t)$ δίνει ιδιάζοντα σημεία κατά μήκος της καμπύλης, ενώ η επιλογή $\mathbf{v}(t) = \mathbf{n}(t)$ (το κάθετο πεδίο της καμπύλης, που υποθέτουμε μη-μηδενικό παντού) δίνει πάντα επιφάνεια.

4. **Λωρίδα του Mobius:** Είναι παράδειγμα που αναδεικνύει τους κινδύνους του να επιτρέπουμε **κλειστό** διάστημα ορισμού σε παραμέτρηση. Είναι μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια, με την έννοια ότι δεν ορίζεται μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο πάνω της. Η παραμέτρηση που θα δώσουμε είναι παραλλαγή αυτής επιφάνειας εκ περιστροφής.

   Στο επίπεδο xz, έχουμε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα $(x(t), z(t)) = (3, t)$, $t \in (-1, 1)$. Θα εφαρμόσουμε περιστροφή $\mathrm{Rot}_z(\theta)$ αλλά ταυτόχρονα θα περιστρέφουμε πρώτα το τμήμα με τη μισή ταχύτητα της περιστροφής γύρω από τον άξονα x. Εφαρμόζουμε λοιπόν στα σημεία του τμήματος τον γραμμικό μετασχηματισμό $\mathrm{Rot}_z(\theta)\,\mathrm{Rot}_x(\theta/2)$. Βρείτε την παραμέτρηση αυτή, με $(\theta, t) \in (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ και δώστε το γράφημα. Δείξτε ότι έχουμε κανονική παραμέτρηση επιφάνειας.

   Εάν στην παραμέτρηση που βρήκατε επιτρέπαμε τις τιμές $\theta = 0$ και 2π, υπολογίστε τις δύο αυτές εικόνες και δείξτε ότι έχουμε αντιστροφή των σημείων του τμήματος, σε σχέση με την αρχική θέση του. Εάν λοιπόν επιτρέπαμε $\theta \in [0, 2\pi]$ τί πρόβλημα θα παρουσιαζόταν με το μοναδιαίο κάθετο πεδίο;

5. (α΄) Δίνεται κανονική καμπύλη $\gamma : (x(t), z(t))$, $t \in (a,b)$, στο κάθετο επίπεδο xz του χώρου $\mathbf{R}^3$, με $x(t) > 0$ για όλα τα t. Δώστε τον πίνακα περιστροφής κατά γωνία θ γύρω από τον κάθετο άξονα z και επομένως δείξτε ότι η περιστροφή της καμπύλης γ δίνει κανονική παραμέτρηση επιφάνειας $\Sigma : (a,b) \times (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3, (t, \theta) \mapsto \mathbf{r}(t, \theta)$. Δώστε κατάλληλες καμπύλες: την γ_1 που να παράγει τη σφαίρα $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ και την γ_2 που να παράγει έναν τόρο T^2.

(β') Δείξτε ότι για $\theta = 0$ το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια ανήκει στο επίπεδο xz. Εξηγήστε γιατί αυτό σημαίνει πως για κάθε θ και κάθε t τέτοιο ώστε $\dot{z}(t) \neq 0$, η ευθεία που ορίζει το κάθετο διάνυσμα περνά από τον άξονα z.

(γ') Τώρα παίρνουμε ως γ το τμήμα της υπερβολής $xz = 1$ για $x > 0$. Υπολογίστε τους πίνακες της πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή και βρείτε ποιά σημεία της είναι ελλειπτικά και ποιά υπερβολικά.

6. (α') Δώστε κανονική παραμέτρηση $\mathbf{r}(\theta, \phi)$ της σφαίρας $S_R^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ ($R > 0$) στο χώρο και δώστε τα σημεία της S_R^2 που *δεν καλύπτονται* από την παραμέτρηση. Υπολογίστε τα πεδία $\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\phi, \mathbf{N}$ (με $\mathbf{N}$ το μοναδιαίο κάθετο πεδίο) και εξηγήστε γιατί δίνουν, για κάθε (θ, ϕ), βάση του $\mathbf{R}^3$.

(β') Δώστε τον ορισμό της πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής, I και II, γενικής επιφάνειας $\Sigma : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^3, (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$ και δώστε την απόδειξη ότι ο πίνακας της δεύτερης Θ.Μ. είναι συμμετρικός. Δείξτε επίσης την ταυτότητα

$$\det Q = ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||^2.$$

(γ') Βρείτε την I και II για την σφαίρα και επομένως δώστε την συνάρτηση καμπυλότητάς της.

(δ') Υπολογίστε το εμβαδόν του τμήματος της σφαίρας που είναι η εικόνα του συνόλου $(\theta, \phi) \in (\pi/4, 3\pi/4) \times (0, \pi)$.

7. Δίνεται το γράφημα $\Sigma = \mathrm{graph} f$ της συνάρτησης

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : \ (x, y) \mapsto f(x, y) = 2x^2 - 2xy - 3y^2.$$

Δείξτε ότι έχουμε κανονική επιφάνεια και βρείτε το κάθετο μοναδιαίο πεδίο $\mathbf{N}(x, y)$. Βρείτε τους πίνακες της πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής και επομένως τον πίνακα του τελεστή σχήματος και τη συνάρτηση καμπυλότητας Gauss $K(x, y)$. Δείξτε ότι όλα τα σημεία της Σ είναι υπερβολικά.

Θεωρούμε καμπύλες στην Σ πάνω απο τις ευθείες $y = cx$, για $c \in \mathbf{R}$. Υπολογίστε την συνάρτηση καμπυλότητας $\kappa(x)$ (που εξαρτάται προφανώς από την σταθερά c). Στο κεντρικό σημείο $(x, y) = (0, 0)$ συνδέστε την εξάρτηση της καμπυλότητας από το c με τις ιδιοτιμές του τελεστή σχήματος στο $(0, 0)$.

8. (α') Πόσες, κατ' ελάχιστον, παραμετρήσεις επιφάνειας χρειαζόμαστε (δηλ. με *ανοικτό* πεδίο ορισμού) για να καλύψουμε τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (με ακτίνα $R > 0$); Για τη συνήθη παραμέτρηση με σφαιρικές συντεταγμένες (θ, ϕ), υπολογίστε τον πίνακα της πρώτης θεμελιώδους μορφής και τη συνάρτηση απεικόνισης στοιχείου εμβαδού $|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi|$ και δώστε το γράφημά της.

(β') Η σφαίρα διαιρείται σε n τμήματα (n θετικός ακέραιος) παίρνοντας τομές με $n-1$ οριζόντια επίπεδα τα οποία ισαπέχουν το ένα από το άλλο (δηλαδή σε απόσταση $2R/n$). Δείξτε ότι τα εμβαδά των n αυτών τμημάτων είναι ίσα.

9. Δίνεται κανονική παραμέτρηση επιφάνειας Σ από το ανοικτό $U \subset \mathbf{R}^2$ στο $\mathbf{R}^3$, $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$. Δείξτε ότι εάν σε σημείο $\mathbf{r}_0 \in \Sigma$ (με $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$) το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}(u_0, v_0)$ έχει μη-μηδενική συντεταγμένη στην κάθετη κατεύθυνση (δηλαδή $\mathbf{N}(u_0, v_0) \cdot$

$\mathbf{k} \neq 0$), τότε η απεικόνιση $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ για (u,v) σε κάποια γειτονιά του (u_0, v_0) δίνει αλλαγή συντεταγμένων. Εξηγήστε πώς αυτό συνεπάγεται ότι η επιφάνεια Σ έχει παραμέτρηση Monge κοντά στο $\mathbf{r}_0$ με παραμέτρους (x,y), δηλαδή εκφράζεται ως $(x,y) \mapsto \mathbf{r}(x,y)$ κοντά στο αρχικό σημείο.

Εξηγήστε γιατί μπορούμε να ισχυριστούμε, γενικεύοντας τα παραπάνω, ότι *κάθε* επιφάνεια έχει παραμετρήσεις Monge που την καλύπτουν, με παραμέτρους (x,y), (y,z) ή (x,z).

10. Θεωρούμε κανονική καμπύλη $\mathfrak{r}(s)$ στο επίπεδο $\mathbf{R}^2$, με φυσική παραμέτρηση. Το εφαπτόμενο πεδίο ταχύτητας $\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathfrak{r}}{ds}$ είναι επομένως μοναδιαίο και ορίζουμε κάθετο μοναδιαίο πεδίο $\mathbf{n}(s) = J\mathbf{t}(s)$, όπου J είναι ο πίνακας περιστροφής κατά $\pi/2$ στην θετική κατεύθυνση. Δώστε τις εξισώσεις Frenet στην περίπτωση αυτή (εκφράστε δηλαδή τις παραγώγους της βάσης $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ ως προς τη βάση).

    Δώστε τώρα προσεγγιστικά το $\mathfrak{r}(s + \Delta s)$ από το ανάπτυγμα Taylor που περιλαμβάνει μέχρι και κυβικούς όρους (δηλαδή Δs^3). Εκφράστε την προσέγγιση του $\mathfrak{r}(s + \Delta s)$ μέσω της βάσης $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$ και της καμπυλότητας (στο επίπεδο) $\kappa(s)$.

    Επιλέγοντας σημείο $\mathbf{r}(s)$ της καμπύλης δικαιολογήστε, από την παραπάνω προσέγγιση, την *Πρόταση:* Εάν η καμπυλότητα είναι μονοτονικά αυξανόμενη C^1 συνάρτηση, τότε η προσεγγιστική παραβολή στο σημείο $\mathbf{r}(s)$ της καμπύλης κείται πάνω από την καμπύλη από την μία μεριά και κάτω από την καμπύλη από την άλλη.

11. Θεωρούμε την επιφάνεια εκ περιστροφής γύρω από τον κάθετο άξονα z που παράγεται από τον κύκλο $(x-3)^2 + z^2 = 1$ στο επίπεδο xz. Υπολογίστε τους πίνακες της πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής και επομένως δώστε τη συνάρτηση καμπυλότητας Gauss K. Βρείτε όλα τα ελλειπτικά, υπερβολικά και παραβολικά σημεία. Δείξτε ότι η κάθετη ευθεία σε κάθε σημείο περνά από τον άξονα z.

12. (α΄) Εάν $\mathbf{v}(t)$ είναι σφαιρική καμπύλη, δηλ. $|\mathbf{v}(t) - \mathbf{r}| = R$ για κάποια $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$ και $R > 0$, δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο ταχύτητάς της είναι εφαπτόμενο στη σφαίρα.

    (β΄) Ποιά είναι η λύση των εξισώσεων Frenet-Serret με δοθέν αρχικό τρίεδρο σε δοθέν σημείο $\mathbf{r}$ και με σταθερή καμπύλότητα $\kappa > 0$ και σταθερή στρέψη σ; Τί γίνεται εάν η στρέψη είναι μηδενική;

    (γ΄) Δείξτε ότι, εάν $Q(u,v)$ είναι ο πίνακας της πρώτης θεμελιώδους μορφής, τότε

    $$\sqrt{\det Q(u,v)} = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|.$$

    (δ΄) Δώστε τους πίνακες της πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής και την καμπυλότητα στο σημείο $\mathbf{0}$ όταν η επιφάνεια είναι γράφημα συνάρτησης $z = f(x,y)$ με $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 0$ και $f_y(0,0) = 0$. Πόσο γενικό είναι αυτό; Μπορεί δηλαδή κάποιος να ισχυριστεί ότι για κάθε επιφάνεια μπορούμε τοπικά (κοντά σε επιλεγμένο σημείο της) να επιλέξουμε συντεταγμένες έτσι ώστε η επιφάνεια δίνεται από τέτοιο γράφημα; Εξηγήστε με όποιον τρόπο προτιμάτε, π.χ. με κατάλληλα σχήματα.

13. Δείξτε ότι, για την συνήθη ¨σφαιρική¨ παραμέτρηση της έλλειψης

    $$\mathbf{r}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} a \sin\theta \cos\phi \\ b \sin\theta \sin\phi \\ c \cos\theta \end{bmatrix}, \quad a \geq b \geq c > 0,$$

οι παράλληλοι $\theta =$ σταθ. είναι πράγματι καμπύλες τομής της έλλειψης με οριζόντια επίπεδα $z =$ σταθ. και οι μεσημβρινοί $\phi =$ σταθ. είναι τομές με κάθετα επίπεδα που περιλαμβάνουν τον κάθετο άξονα z.

14. Είδαμε ότι η γραμμική απεικόνιση του τελεστή σχήματος

$$S : T_{\mathbf{r}}\Sigma \to T_{\mathbf{r}}\Sigma$$

είναι συμμετρική. Ο εφαπτόμενος χώρος $T_{\mathbf{r}}\Sigma = \mathrm{span}(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$. Ο πίνακας που δίνει την S ως προς κανονική παραμέτρηση $\mathbf{r}(u, v)$ όμως,

$$S(u, v) = Q^{-1}(u, v)P(u, v),$$

δεν είναι απαραίτητα συμμετρικός. Δώστε παράδειγμα όπου δεν είναι συμμετρικός.

Θα αποδείξουμε ότι, με κατάλληλη αλλαγή βάσης, έχουμε πράγματι συμμετρικό πίνακα. Οι ιδιοτιμές του πίνακα $S(u, v)$, λοιπόν, είναι πραγματικές.

(α΄) Ένας τετραγωνικός, συμμετρικός $n \times n$ πίνακας A είναι θετικά ορισμένος εάν και μόνο εάν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές. Καθώς είναι συμμετρικός, υπάρχει ορθογώνιος πίνακας U με τις στήλες ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων, από το φασματικό θεώρημα. Γράφουμε λοιπόν

$$A = U\Lambda U^{-1}, \quad \text{με} \quad U^{-1} = U^T$$

και Λ διαγώνιο, με θετικά διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές λ_i. Ορίζουμε πίνακα $B = U\Lambda^{1/2}$, όπου ο $\Lambda^{1/2}$ έχει διαγώνια στοιχεία $\sqrt{\lambda_i}$. Ο Πίνακας B λέγεται *τετραγωνική ρίζα* του $A > 0$, καθώς ισχύει $A = BB^T$, και είναι αντιστρέθιμος –δείξτε τα αυτά.

(β΄) Εφαρμόστε τα παραπάνω για να μετατρέψετε την εξίσωση ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων για τον πίνακα S, δηλαδή την εξίσωση

$$S\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \Longleftrightarrow Q^{-1}P\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

σε εξίσωση $C\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, με C **συμμετρικό** θετικά ορισμένο πίνακα και την ίδια ιδιοτιμή λ με τον S. Βρείτε την σχέση μεταξύ των ιδιοδιανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_i$ του C δίνουν ορθοκανονική βάση. Ισχύει το ίδιο για τα ιδιοδιανύσματα του S; Εξηγήστε γιατί και δώστε παραδείγματα. Τέλος, εξηγήστε γιατί ο τελεστής σχήματος ως ενδομορφισμός του εφαπτόμενου χώρου έχει ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων.

ΕΚ, 15/12/2018