Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων,
Τομεας Γεωμετριας

Κλασικη Διαφορικη Γεωμετρια

Δεύτερη Εργασία, 2018-19

1 Καμπύλες στον χώρο και στο επίπεδο

1.1 Καμπύλες στον χώρο

1. **Καμπύλη του Viviani:** είναι η τομή σφαίρας με κύλινδρο μισής ακτίνας που εφάπτεται της σφαίρας, είναι δηλαδή η τομή των επιφανειών:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \ \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

   (Κάνετε το σχήμα, κατά προτίμηση με υπολογιστή.)

   Υπολογίστε παραμέτρηση της καμπύλης που προκύπτει ως εξής: κατ᾽ αρχήν, για τον κύλινδρο, χρησιμοποιήστε την παραμέτρηση $x(t) = (R/2) + (R/2)\cos(t)$, $y(t) = (R/2)\sin(t)$, $z = z$ (που είναι απλά μετατοπισμένες κυλινδρικές συντεταγμένες.) Αντικαταστήσετε αυτά στην εξίσωση της σφαίρας και υπολογίστε το z μέσω τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.

   Δείξτε ότι έχουμε κανονική παραμέτρηση κλειστής καμπύλης, με μόνη διαφορά ότι δεν είναι 1:1 με την εικόνα της. Δώστε το μοναδικό σημείο αυτοτομής.

2. **Καμπύλες Bézier:** Στα σχεδιαστικά λογισμικά (π.χ. Adobe Illustrator, CorelDRAW κ.ο.κ.) είναι πολύ χρήσιμες κάποιες καμπύλες με συντεταγμένες πολυώνυμα χαμηλού βαθμού στο t:

   Η *γραμμική καμπύλη Bézier* είναι η καμπύλη πρώτου βαθμού $\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1$, με $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{v}_1$ δύο σημεία. Προφανώς, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{v}_1$ και $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$.

   Η *τετραγωνική καμπύλη Bézier* χρησιμοποιεί τρία διακριτά σημεία:

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\left[(1-t)\mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1\right] + t\left[(1-t)\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2\right] =$$
$$= (1-t)^2\mathbf{v}_0 + 2t(1-t)\mathbf{v}_1 + t^2\mathbf{v}_2.$$

   Προφανώς $\mathbf{r}(0) = \mathbf{v}_0$ και $\mathbf{r}(1) = \mathbf{v}_2$. Βρείτε τα διανύσματα ταχύτητας για $t = 0$ και $t = 1$ και δείξτε ότι η καμπύλη ανήκει στο κυρτό περίβλημα των τριών σημείων, δηλαδή μέσα στο τρίγωνο που ορίζουν και είναι επομένως επίπεδη. Εξηγήστε πώς θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε την καμπύλη αυτή από το τελικό της σημείο με μία ακόμα τετραγωνική καμπύλη, ώστε η συνάρτηση ταχύτητας να είναι συνεχής.

3. Δίνεται κανονική παραμέτρηση καμπύλης στο χώρο, με

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ ax(t) + b \\ z(t) \end{bmatrix}, \ a \neq 0.$$

Δείξτε ότι η καμπύλη αυτή έχει μηδενική στρέψη και επομένως είναι επίπεδη και βρείτε το επίπεδο που την περιέχει. Δώστε δεύτερη, πιό άμεση απόδειξη ότι είναι επίπεδη, θεωρώντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών.

4. Δείξτε ότι η *ενειλιγμένη καμπύλη* της έλικας $\mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t)\,\mathbf{i} + R\sin(\omega t)\,\mathbf{j} + vt\,\mathbf{k}$ ($R, \omega, v > 0$), δηλαδή ο τόπος των κέντρων των εφαπτόμενων κύκλων $\boldsymbol{\rho}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)$, είναι πάλι έλικα.

   Βρείτε συνθήκη ώστε η ενειλιγμένη αυτή έλικα να κείται στον ίδιο κύλινδρο με την αρχική έλικα.

5. Δείξτε ότι οι εξισώσεις Frenet-Serret γράφονται σε μορφή πινάκων, ορίζοντας τους 3×3 πίνακες

$$\Phi(s) = [\mathbf{t}(s)|\mathbf{n}(s)|\mathbf{b}(s)],\ \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\sigma(s) \\ 0 & \sigma(s) & 0 \end{bmatrix},$$

   ως το σύστημα εξισώσεων

$$\frac{d}{ds}\Phi(s) = \Phi(s)\Omega.$$

   Για γενικό αντισυμμετρικό πίνακα

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix},$$

   δείξτε ότι ορίζεται κατάλληλο διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}$, έτσι ώστε για διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$,

$$\Omega\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

   Τέλος, δείξτε ότι ορίζεται κατάλληλο $\boldsymbol{\omega}(s)$ (λεγόμενο διάνυσμα Darboux) τέτοιο ώστε οι εξισώσεις Frenet-Serret γράφονται:

$$\frac{d}{ds}\mathbf{t}(s) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}, \quad \frac{d}{ds}\mathbf{n}(s) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \quad \frac{d}{ds}\mathbf{b}(s) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$$

   (το ίδιο και για τις τρεις εξισώσεις!)

6. (α΄) Δείξτε ότι η έλικα

$$\mathbf{r}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ v\theta \end{bmatrix},$$

   με σταθερή κάθετη ταχύτητα $v > 0$, κείται στον κύλινδρο $\{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^3$ και δώστε τη φυσική παραμέτρησή της. Δώστε το τρίεδρο του Frenet, καθώς και τη συνάρτηση καμπυλότητας $\kappa(s)$. Επομένως, δώστε το εφαπτόμενο επίπεδο, καθώς και τον εφαπτόμενο κύκλο της έλικας σε τυχαίο σημείο της.

   (β΄) Για ποιά τιμή της κάθετης ταχύτητας v το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου ανήκει στον κύλινδρο; Τέλος, υπολογίστε τη στρέψη $\sigma(s)$ από τον τρόπο ορισμού της.

7. Δείξτε ότι εάν $h_1 : (a,b) \to \mathbf{R}$ και $h_2 : (a,b) \to \mathbf{R}$ είναι C^2 συναρτήσεις στο μη-κενό διάστημα $(a,b) \subset \mathbf{R}$, τότε η παραμέτρηση

$$(a,b) \to \mathbf{R}^3 : x \mapsto \mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + h_1(x)\,\mathbf{j} + h_2(x)\,\mathbf{k}$$

δίνει κανονική καμπύλη. Εξηγήστε γιατί κάθε επίπεδο $x = c$, για $c \in (a,b)$, τέμνει την καμπύλη αυτή σε μοναδικό σημείο.

Δείξτε ότι, αντίστροφα, εάν κάθε επίπεδο $x =$σταθ. τέμνει κανονική καμπύλη γ σε το πολύ ένα σημείο και την τέμνει εγκάρσια, τότε μπορεί να ορίσουμε συναρτήσεις h_1, h_2 όπως παραπάνω, έτσι ώστε η καμπύλη να επιδέχεται παραμέτρηση μέσω τμήματος του άξονα x, όπως μόλις ορίσαμε.

8. Θα μελετήσουμε πότε ορίζεται καμπύλη με τον πιό παραδοσιακό τρόπο ως η τομή δύο ¨επιφανειών¨. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο εξισώσεις για σημεία του $\mathbf{R}^3$:

$$f_1(x,y,z) = 0, \quad f_2(x,y,z) = 0.$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι το σύνολο των ¨λύσεων¨ των εξισώσεων αυτών είναι μη-κενό.

Θεωρούμε τον ιακωβιανό 2×3 πίνακα των πρώτων παραγώγων σε κάθε σημείο του συνόλου αυτού:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι εάν η ορίζουσα ενός 2×2 υπο-πίνακα (π.χ. των δύο πρώτων στηλών) είναι μη-μηδενική στο σημείο, τότε ορίζονται συναρτήσεις g_1, g_2 σε κάποιο διάστημα τέτοιες ώστε η παραμέτρηση π.χ. $z \mapsto (g_1(z), g_2(z), z)$ δίνει καμπύλη στο σύνολο λύσεων, δηλαδή τοπικά η τομή των δύο επιφανειών που ορίζουν οι εξισώσεις είναι καμπύλη. Εξηγήστε γιατί η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων κλίσης σε κάθε σημείο τομής. Βρείτε εξισώσεις για το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας της καμπύλης αυτής.

1.2 Καμπύλες στο επίπεδο

Θεωρούμε *κανονική παραμέτρηση καμπύλης* στο $\mathbf{R}^2$:

$$\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto \boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}, \text{ με } \frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq \mathbf{0}\ \forall t.$$

Η φυσική παραμέτρηση γράφεται $\boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(t(s))$, οπότε $\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} / \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$ και $\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{ds^2} = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, με το κάθετο διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{n}(s) = J\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}, \quad \text{όπου } J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας περιστροφής κατά $\pi/2$ στην θετική φορά. Θυμίζουμε ότι πολύ συχνά είναι δύσκολο ή αδύνατο να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση $t(s)$ της $s(t)$, ακόμα και αν αυτή η τελευταία είναι διαθέσιμη, και επομένως δεν είναι διαθέσιμη η φυσική παραμέτρηση.

9. Δείξτε, βασισμένοι στους παραπάνω τύπους, ότι η συνάρτηση καμπυλότητας μπορεί να υπολογιστεί *απευθείας από την αρχική παραμέτρηση* από τον τύπο:

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot J\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}.}$$

10. Δώστε επίσης τύπους για το *κέντρο* $\mathbf{C}(t)$ και την *ακτίνα* $R(t)$ του εγγύτατου (ή εφαπτομένου) κύκλου στο σημείο $\mathbf{r}(t)$.

11. Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω για την περίπτωση **σπείρας** στο επίπεδο.

    (α΄) Οι σπείρες δίνονται συνήθως σε πολική μορφή: έχουμε τη *σπείρα του Αρχιμήδη*, $r = a\theta$ και την *εκθετική σπείρα* $r = ae^{b\theta}$, για κάποια $a, b \neq 0$. Το r είναι το μέτρο του $\mathbf{r}$, $r = |\mathbf{r}|$, αλλά, προσοχή, η ¨γωνία¨ θ θεωρείται να ανήκει στο $\mathbf{R}_+$—και όχι κάποιο διάστημα μήκους 2π.

    Θα εργαστούμε πάνω στην απλή σπείρα του Αρχιμήδη όπου $a = 1$. Η παραμέτρηση καμπύλης δίνεται (γιατί;) από τις εξισώσεις:

    $$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{bmatrix},\ t \geq 0.$$

    Υπολογίστε τη συνάρτηση μήκους $s(t)$ και δώστε γράφημά της. Υποθέτουμε χωρίς απόδειξη ότι δεν υπάρχει αναλυτική μορφή για την αντίστροφη συνάρτησή της $t(s)$.

    (β΄) Επομένως, υπολογίστε τη συνάρτηση καμπυλότητας $\kappa(t)$ από την *αρχική παραμέτρηση* και δείξτε ότι είναι μονοτονική στο $\{t \geq 0\}$.

    (γ΄) Βρείτε το κέντρο και ακτίνα του εφαπτομένου κύκλου στη σπείρα στο $t = 4$ και δώστε παραμέτρησή του. Με τη βοήθεια λογισμικού, κάνετε τα γραφήματα και παρατηρήστε ότι για $t > 4$, η σπείρα βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου.

12. Υποθέτουμε ότι έχουμε κανονική, λεία **κλειστή** καμπύλη (δηλαδή $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$, με $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0$ και $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(a) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(b)$) η οποία είναι *παντού μη-μηδενική*: $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$.

    Θεωρούμε χρόνο t_0 όπου το μέτρο $|\mathbf{r}(t_0)|$ είναι ελάχιστο (γιατί ξέρουμε ότι υπάρχει τέτοιο t_0; Είναι απαραίτητα μοναδικό; Δώστε πρόχειρα παραδείγματα.) Δείξτε ότι το διάνυσμα ταχύτητας $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$ είναι κάθετο στο $\mathbf{r}(t_0)$.

13. **Σταθερή καμπυλότητα:** Θα δείξουμε, βήμα-βήμα, ότι εάν μία καμπύλη έχει σταθερή, μη-μηδενική καμπυλότητα $\kappa > 0$, τότε είναι τόξο κύκλου ακτίνας $R = 1/\kappa$ (το αντίστροφο είναι προφανές.) Θα κάνουμε χρήση των σχέσεων:

    $$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d\mathbf{t}}{ds} & = & \kappa\,\mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} & = & -\kappa\,\mathbf{t} \end{array} \right. \quad \text{(Σχέσεις Frenet)}$$

    $$\mathbf{n} = J\mathbf{t},\ \text{οπότε, καθώς } J^2 = -I,\ \mathbf{t} = -J\mathbf{n}.$$

    (α΄) Δείξτε ότι η δεύτερη εξίσωση Frenet είναι απόρροια της πρώτης, από την παραπάνω σχέση, και παρατηρήστε ότι έχουμε: $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa J\mathbf{t}$.

    Θα λύσουμε το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων: θέτουμε $\mathbf{t}(s) = \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι και οι δύο συναρτήσεις ικανοποιούν την ίδια εξίσωση δευτέρας τάξης:

    $$\frac{d^2u}{ds^2} + \kappa^2 u = 0,\ \frac{d^2v}{ds^2} + \kappa^2 v = 0,$$

    η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή και έχει λύση, π.χ. για την u:

    $$u(s) = a\cos(\kappa s) + b\sin(\kappa s).$$

Υποθέτοντας αρχική τιμή του διανύσματος ταχύτητας $\mathbf{t}(0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$ που πρέπει να είναι μοναδιαίο, δηλαδή $u_0^2 + v_0^2 = 1$, βρείτε τη λύση $\mathbf{t}(s)$.

(β') Δείξτε ότι έχουμε $|\mathbf{t}(s)| = 1$, $\forall s$, έχουμε δηλαδή λύση που αυτόματα δίνει μοναδιαίο πεδίο ταχύτητας. Τέλος, ολοκληρώνοντας, βρείτε την καμπύλη σταθερής καμπυλότητας κ και επαληθεύστε ότι είναι κύκλος ακτίνας $R = 1/\kappa$.

14. **Έλλειψη:** Δώστε παραμέτρηση $\mathbf{r}(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ για την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, όπου υποθέτουμε $a > b > 0$ (παραλλαγή πολικών συντεταγμένων). Υπολογίστε από τον τύπο που έχετε βρει τη συνάρτηση καμπυλότητας $\kappa(t)$ και βρείτε τα σημεία μέγιστης και ελάχιστης καμπυλότητας.

    Τέλος, δώστε την καμπύλη των κέντρων των εγγύτατων ή εφαπτόμενων κύκλων και, με χρήση κάποιου λογισμικού, δώστε το γράφημά της. Η καμπύλη αυτή δεν είναι, γενικά, κανονική και λέγεται **ενειλιγμένη** της αρχικής (evolute).

15. **Η έλκουσα καμπύλη (tractrix):** είναι η επίπεδη καμπύλη, μία παραμέτρηση της οποίας είναι:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ \sin t \end{bmatrix}, \ t \in (0, \pi).$$

(α') Δώστε το γράφημα της καμπύλης και δείξτε ότι είναι κανονική παντού, εκτός από ένα σημείο.

(β') Υπολογίστε τη συνάρτηση καμπυλότητας $\kappa(t)$.

(γ') Ο λόγος που λέγεται *έλκουσα* αυτή η καμπύλη είναι ότι το μήκος του τμήματος κάθε εφαπτομένης ευθείας μεταξύ της καμπύλης και του οριζοντίου άξονα είναι σταθερή (η ερμηνεία που δίνεται είναι ότι κινούμενοι κατά μήκος του οριζοντίου άξονα με αρχή το 0, σύρουμε ένα αντικείμενο που συνδέεται με λουρί (έναν σκύλο;!) και που ξεκινά από το σημείο $(0, 1)$). Δείξτε την ιδιότητα αυτή και δώστε την τιμή του σταθερού αυτού μήκους.

16. Δώστε σχηματικά κανονική καμπύλη στο επίπεδο με συνεχή συνάρτηση ταχύτητας και με συνάρτηση καμπυλότητας ως προς τη φυσική παραμέτρηση

$$\kappa(s) = \begin{cases} 1, & 0 < s < \pi \\ 3, & \pi < s < 4\pi/3, \\ -3, & 4\pi/3 < s < 5\pi/3 \\ 3, & 5\pi/3 < s < 2\pi \end{cases}$$

(Η καμπυλότητα δεν ορίζεται στα άκρα των διαστημάτων.) Είναι κλειστή η καμπύλη ή όχι;

1.3 Επιπλέον ασκήσεις

17. (α') Δείξτε ότι το *γράφημα* μιάς C^1 συνάρτησης $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι πάντοτε κανονική καμπύλη στο επίπεδο.

(β') Η εξίσωση $e^{-y}x^2 + 3y^2 = 5$ ορίζει υποσύνολο του επιπέδου, το οποίο θέλουμε να δείξουμε ότι είναι κανονική καμπύλη. Με χρήση του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, δείξτε ότι κοντά στα σημεία $(x, y) = (\pm\sqrt{5}, 0)$ και $(0, \pm\sqrt{5/3})$

έχουμε καμπύλη που δίνεται από γράφημα. Πώς μπορείτε να ισχυριστείτε ότι με τον τρόπο αυτό μπορούμε να καλύψουμε όλα τα σημεία του συνόλου αυτού;

(γ΄) Με χρήση λογισμικού, κάνετε το σχήμα της καμπύλης αυτής και επομένως περιγράψτε σε ποιά σημεία μπορούμε να πάρουμε γράφημα συνάρτησης $y(x)$ και σε ποιά συνάρτησης $x(y)$.

18. Δίνεται *παραβολή* στο επίπεδο $y = ax^2$, $a \neq 0$. Το γράφημά της είναι κανονική καμπύλη. Βρείτε τη συνάρτηση καμπυλότητας $\kappa(x)$. Δείξτε ότι η εφαπτόμενη ή προσεγγιστική παραβολή για $x = 0$ ταυτίζεται με την αρχική παραβολή και βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης προβολής σε γενικό σημείο. Για την τιμή $a = 1$, βρείτε τον εφαπτόμενο κύκλο στα σημεία $x = 0$ και $x = 1$ και κάνετε τα σχήματα. Τέλος, βρείτε όλα τα σημεία τομής του κύκλου για $x = 1$ με την αρχική καμπύλη/παραβολή.

19. Δείξτε ότι η καμπύλη στο επίπεδο που δίνεται από την παραμέτρηση

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{d}_1 + t^2\,\mathbf{d}_2, \quad t \in \mathbf{R}$$

με τα διανύσματα $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ γραμμικά ανεξάρτητα και το $\mathbf{r}_0$ αυθαίρετο σημείο είναι *παραβολή*, και δώστε τον άξονα και την κορυφή της. Δώστε παραδείγματα, με κατάλληλα γραφήματα.

20. Δώστε κανονικές παραμετρήσεις που να καλύπτουν την *έλλειψη* στο επίπεδο

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

Βρείτε τη συνάρτηση καμπυλότητας και τα σημεία όπου έχει μέγιστες και ελάχιστες τιμές. Βρείτε επίσης, και σχεδιάστε, τους εφαπτόμενους κύκλους στα σημεία αυτά.

21. Θέλουμε να δείξουμε ότι οποιαδήποτε μη κενή τομή σφαίρας με επίπεδο που δεν εφάπτεται στη σφαίρα είναι κύκλος.

(α΄) Θεωρούμε την καμπύλη που ορίζεται ως η τομή της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ με το επίπεδο $x + y - z = 1$. Βρείτε την καμπύλη προβολής της τομής και δώστε κανονική της παραμέτρηση. Έτσι, ανεβάστε την προβολή αυτή στο χώρο από την εξίσωση τπυ επιπέδου και δώστε την καμπύλη $\mathbf{r}(t)$. Δεν είναι σαφές ότι έχουμε κύκλο στο στάδιο αυτό, αν και γνωρίζουμε ότι έχουμε *επίπεδη* καμπύλη, εκ κατασκευής. Εξηγήστε γιατί, για να αποδείξουμε ότι είναι κύκλος, αρκεί να δείξουμε ότι η καμπυλότητά της είναι σταθερή. Επαληθεύστε ότι αυτό ισχύει για την καμπύλη που βρήκατε.

(β΄) Η δεύτερη, συντομότερη και πιό ικανοποιητική μέθοδος, βασίζεται στο γεγονός ότι υπάρχει περιστροφή που μετατρέπει οποιοδήποτε επίπεδο σε οριζόντιο επίπεδο $z =$σταθερό. Η τομή οριζόντιου επιπέδου $z = c$ με σφαίρα είναι προφανώς κύκλος, εφόσον $|c| < 1$: $x^2 + y^2 = 1 - c^2$ είναι η προβολή, και ανεβαίνει σε κύκλο στο επίπεδο.

Βρείτε αλλαγή βάσεων που να αντιστοιχεί σε ορθογώνιο μετασχηματισμό και που δίνει επομένως περιστροφή που στέλνει το επίπεδο $x + y - z = 1$ σε επίπεδο $z = c$. Βρείτε το c και επομένως την ακτίνα του κύκλου τομής.

22. Ορίζουμε καμπύλη στο χώρο $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (1+\cos t)\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}, & 0 \le t \le \pi \\ \cos(t-\pi/2)\,\mathbf{j} + (1-\sin(t-\pi/2))\,\mathbf{k}, & \pi \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Δείξτε ότι έχουμε *συνεκτική* καμπύλη η οποία είναι C^1 αλλά όχι C^2 και κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα. Δώστε τον εφαπτόμενο κύκλο σε κάθε σημείο της καμπύλης όπου είναι C^2.

23. Θεωρούμε την καμπύλη (που έχουμε αναφέρει ότι λέγεται twisted cubic)

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(α΄) Δείξτε ότι είναι κανονική, υπολογίστε τις συναρτήσεις καμπυλότητας $\kappa(t)$ και στρέψης $\sigma(t)$ και δώστε τα γραφήματά τους. Βρείτε το σημείο μέγιστης καμπυλότητας.

(β΄) Δείξτε ότι το τρίεδρο Frenet στο $t=0$ συμπίπτει με την διατεταγμένη, ορθοκανονική βάση $(\,\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Επομένως, δείξτε ότι η προσεγγιστική παραβολή στο $t=0$ είναι ακριβώς η παραβολή $y = x^2$ στο οριζόντιο επίπεδο.

(γ΄) Το ανάπτυγμα Taylor της καμπύλης με κέντρο το $t=0$ συμπίπτει με την αναλυτική μορφή της —γιατί; Θεωρούμε τώρα το ανάπτυγμα Taylor για την καμπύλη ως προς τη φυσική παράμετρο, με κέντρο το $s=0$, που αντιστοιχεί στο $t=0$, με όρους μέχρι και κυβικούς:

$$\boldsymbol{\rho}(s) \simeq \boldsymbol{\rho}(0) + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}(0)s + \frac{1}{2}\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{ds^2}(0)s^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\boldsymbol{\rho}}{ds^3}(0)s^3.$$

Βασιζόμενοι στη θεωρία και στους υπολογισμούς που έχετε κάνει, και παρατηρώντας ότι $\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{ds^2} = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, δώστε το κυβικό ανάπτυγμα Taylor για την $\rho(s)$ ως προς την συνήθη βάση, δηλαδή

$$\boldsymbol{\rho}(s) \simeq a(s)\,\mathbf{i} + b(s)\,\mathbf{j} + c(s)\,\mathbf{k}.$$

για κατάλληλα πολυώνυμα $a(s), b(s), c(s)$. Συγκρίνετε τα δύο αναπτύγματα.

24. (α΄) Δείξτε ότι εάν το δισκάθετο μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{b}(s)$ μίας κανονικής καμπύλης στον χώρο είναι σταθερό, τότε η καμπύλη ανήκει σε επίπεδο.

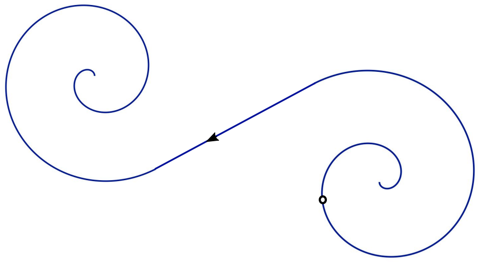
(β΄) Για την επίπεδη καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (t\cos t, t\sin t)$, $t \in \mathbf{R}$, δώστε τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)$ και την συνάρτηση καμπυλότητας $\kappa(t)$.

(γ΄) Δώστε το γράφημα της συνάρτησης καμπυλότητας της C^2 επίπεδης καμπύλης του σχήματος. Δώστε επίσης, προσεγγιστικά, τον εφαπτόμενο κύκλο της καμπύλης στο σημείο που είναι σημειωμένο.

25. (α΄) Δίνεται η καμπύλη

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \; t \in \mathbf{R}_+$$

στο χώρο $\mathbf{R}^3$. Δείξτε ότι ανήκει σε κύλινδρο και δώστε σχήμα της καμπύλης αυτής.



(β') Υπολογίστε τη συνάρτηση καμπυλότητάς της $\kappa(t)$, βρείτε το όριο $\lim_{t\to+\infty}\kappa(t)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμά σας.

(γ') Βρείτε τα ορθοκανονικά διανύσματα του τριέδρου του Frenet της καμπύλης στο $t = 0$, $\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0)$. Υπολογίστε επομένως τις συνιστώσες της επιτάχυνσης $\ddot{\mathbf{r}}(0)$ στην ορθοκανονική αυτή βάση.

ΕΚ, 17/11/2018