Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων,
Τομεας Γεωμετριας

Κλασικη Διαφορικη Γεωμετρια

Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Παράδειγμα

Θεωρούμε το σύστημα μη-γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) - z^3 &= 0 \\ x^3 - y + y^2 - z^2 &= -1 \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να περιγράψουμε αναλυτικά το σύνολο των λύσεών του. Παρατηρούμε ότι το σημείο $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ είναι λύση. Θα δείξουμε, με την βοήθεια του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης, ότι κοντά στο σημείο αυτό, το σύνολο λύσεων είναι μονοδιάστατο (καμπύλη), όπως θα περιμέναμε για ένα σύστημα δύο εξισώσεων σε τρεις μεταβλητές. Έτσι, έχουμε τουλάχιστον μιά τοπική εικόνα για το σύνολο λύσεων.

Ερμηνεύουμε κατ' αρχήν το σύστημα ως το πρόβλημα εύρεσης της αντίστροφης εικόνας συνάρτησης $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, με F την συνάρτηση

$$F(x, y, z) = (\cos(x+y) - z^3, x^3 - y + y^2 - z^2)$$

και τιμή το $(0, -1)$, δηλαδή το σύνολο $F^{-1}(0, -1)$.

Υπολογίζουμε τον 2×3 πίνακα της παραγώγου (Ιακωβιανό πίνακα)

$$DF(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\sin(x+y) & -\sin(x+y) & -3z^2 \\ 3x^2 & -1+2y & -2z \end{bmatrix}.$$

Στο σημείο $(0, 0, 1)$ δίνει τον πίνακα

$$DF(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

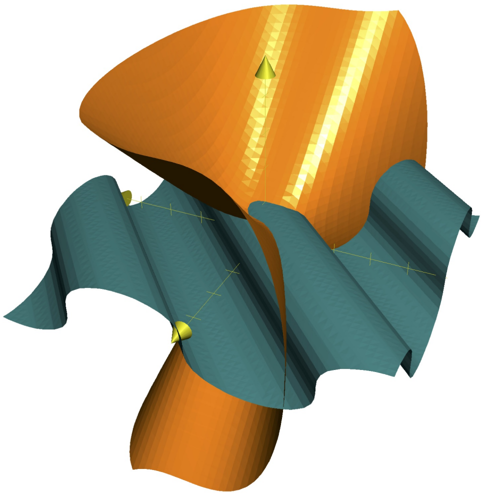
ο οποίος έχει rank ίσο με δύο, καθώς επιλέγοντας τις στήλες 2 και 3 έχουμε 2×2 υπο-πίνακα με μη-μηδενική ορίζουσα.

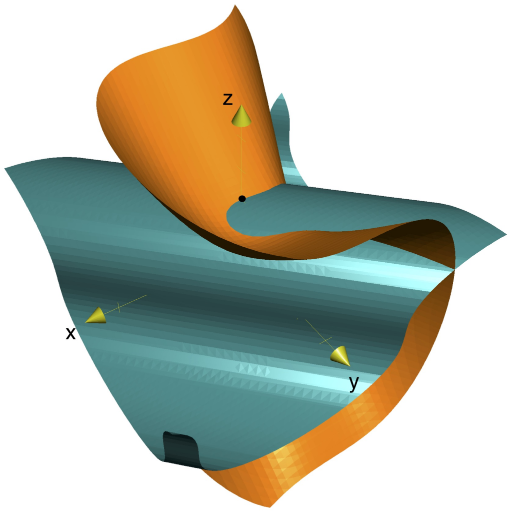
Αλλά από το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει λεία συνάρτηση, τοπικά, δηλαδη από γειτονιά I του $x = 0$, στο κάθετο επίπεδο yz,

$$h : I \to \mathbf{R}^2 : x \mapsto (y(x), z(x))$$

με $y(0) = 0$ $z(0) = 1$, τέτοια ώστε το *γράφημά* της να δίνει, τοπικά πάλι, το σύνολο λύσεων του συστήματος, δηλαδή την ισοσταθμική καμπύλη της συνάρτησης F για την τιμή $(0, -1)$.

Με γράφημα εννοούμε το σύνολο των σημείων $(x, y(x), z(x))$ του χώρου $\mathbf{R}^3$, για $x \in I$ (στην θεωρία καμπυλών θα δούμε ότι έχουμε κανονική παραμέτρηση καμπύλης στο χώρο).





Στο πρώτο σχήμα βλέπουμε τις ισοσταθμικές επιφάνειες κάθε εξίσωσης χωριστά (πράσινη η πρώτη, πορτοκαλί η δεύτερη). Στο δεύτερο σχήμα εστιάζουμε κοντά στο σημείο $(0, 0, 1)$ του κάθετου άξονα. Είναι προφανές από το σχήμα ότι η τομή των δύο επιφανειών είναι καμπύλη και ότι κοντά στο σημείο αυτό μπορεί να παραμετρηθεί από το x. Πιό μακριά από το σημείο όμως, παρατηρούμε στροφή της καμπύλης τομής και μαντεύουμε ότι η παραμέτρηση δεν μπορεί να γίνει από το x, αλλά ίσως από το y. Επιβεβαιώνουμε έτσι την τοπική φύση του αποτελέσματος που παίρνουμε από το ΘΠΣ.

Άσκηση: Βρείτε το διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης λύσεων στο σημείο $(0, 0, 1)$.

Ε. Κάππος, 16-10-2018