Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων,
Τομεας Γεωμετριας

Κλασικη Διαφορικη Γεωμετρια

Πρώτη Εργασία, 2018-19

1 Προαπαιτούμενες γνώσεις και βασική προετοιμασία

Το μάθημα της **Κλασικής Διαφορικής Γεωμετρίας Ι** έπεται άλλων μαθημάτων, πάνω στα οποία είναι φυσικό να βασίζεται. Οι ασκήσεις που ακολουθούν αφορούν και κάποιες από τις αναγκαίες γνώσεις από αυτά τα μαθήματα. Όπως αναφέρεται στην ιστοσελίδα της ΚΔΓ Ι, ο τρόπος που προτείνεται για να ακολουθήσετε το μάθημα περιλαμβάνει τακτική επανάληψη, και τριβή με τις καινούριες έννοιες. Έτσι υποθέτουμε ότι κάνετε μόνοι σας εξάσκηση των βασικών υπολογιστικών μεθόδων[1] και οι Ασκήσεις που ακολουθούν πηγαίνουν μερικές φορές λίγα βήματα παρα πέρα, για να σας οδηγήσουν σε πληρέστερη και βαθύτερη κατανόηση. Σε αρκετά σημεία είναι απαραίτητη η χρήση κάποιου λογισμικού για να γίνουν κατάλληλα σχήματα.

Οι βασικές έννοιες και μέθοδοι της *Γραμμικής Άλγεβρας* είναι σε συνεχή χρήση στην ΚΔΓ. Κάποια αποτελέσματα της ΓΑ που ίσως δεν έχουν καλυφθεί αναφέρθηκαν στις παραδόσεις και κάποια βρίσκονται στις ασκήσεις που ακολουθούν.

Στο μάθημα του *Λογισμού 3* δίνονται πολύ βασικά αποτελέσματα που θα χρειαστούμε (όπως τα θεωρήματα της αντίστροφης και πεπλεγμένης συνάρτησης), ενώ ο *Λογισμός 4* είναι από μιά σκοπιά μιά εισαγωγή στην ΚΔΓ και δίνει μιά πρώτη προσέγγιση, και ορισμούς, των εννοιών των καμπυλών και επιφανειών.

Από την *Αναλυτική Γεωμετρία* θεωρούνται γνωστές οι έννοιες του Αφινικού Χώρου και του Ευκλείδειου χώρου, με βασικό παράδειγμα τον χώρο $\mathbf{R}^3$ των τριάδων πραγματικών αριθμών (x, y, z) με το *κανονικό* εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ να είναι το γνωστό

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Το επίπεδο $\mathbf{R}^2$ θεωρείται συνήθως (εάν δεν κάνουμε σαφές σε μία άσκηση ότι εννοούμε κάτι διαφορετικό), ως ο οριζόντιος διανυσματικός χώρος του $\mathbf{R}^3$, δηλαδή τα σημεία $(x, y, 0)$. Θεωρούμε γνωστές τις έννοιες των αφινικών συντεταγμένων και της ισομετρίας, καθώς και τις παραμετρικές και αναλυτικές μορφές για αφινικά επίπεδα στον χώρο $\mathbf{R}^3$.

Εάν έχουμε επιλέξει την συνήθη βάση του $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ και $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, τότε γράφουμε το σημείο $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ως διάνυσμα στήλης

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

[1]Πολλές τέτοιες απλές υπολογιστικές ασκήσεις βρίσκονται στα βιβλία που έχουμε προτείνει, αλλά εύκολα φτιάχνονται και από εσάς.

Προσοχή: εάν επιλέξουμε διαφορετική βάση, τότε αλλάζει και το διάνυσμα. Έτσι, αν $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ είναι μία άλλη βάση, τότε το ίδιο σημείο είναι

$$\mathbf{r} = u\,\mathbf{b}_1 + v\,\mathbf{b}_2 + w\,\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\mathbf{b}_1 = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -3, 1)$ και $\mathbf{b}_3 = (2, 2, -2)$ δίνουν βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbf{R}^3$. Έχει τον ίδιο ή αντίθετο προσανατολισμό με αυτόν της συνήθους διατεταγμένης βάσης ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$); Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{v} = (4, 5, -3)$ ως προς τη βάση αυτή.

2. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbf{R}^3$ θεωρούμε τα διανύσματα

$$\mathbf{b}_1 = (1, 3, -1), \quad \mathbf{b}_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{b}_3 = (1, 1, 2).$$

   (α΄) Δείξτε ότι αποτελούν βάση $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ του $\mathbf{R}^3$.

   (β΄) Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{v} = (-3, 7, 1)$ ως προς τη βάση αυτή, δηλαδή τα x_1, x_2, x_3 τέτοια ώστε $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} x_i b_i$.

   (γ΄) Εφαρμόστε τη διαδικασία Gram-Schmidt στην $\mathcal{B}$ με τη διάταξη $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ για να βρείτε διατεταγμένη ορθοκανονική βάση $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ και βρείτε τις συντεταγμένες του $\mathbf{v}$ ως προς τη βάση $\mathcal{E}$.

   (δ΄) Βρείτε την προβολή του $\mathbf{b}_2$ στο επίπεδο $\mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3)$.

3. **Κινούμενες βάσεις:** Έστω ότι έχουμε μία C^1 απεικόνιση $f : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, με $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ ανοικτά μη-κενά υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$, η οποία είναι 1:1, επί και με C^1 αντίστροφη $f^{-1} : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$. Η Ιακωβιανή παράγωγος $Df(\mathbf{x})$ σε κάθε σημείο του $\mathcal{D}$ είναι ο $n \times n$ πίνακας των παραγώγων πρώτης τάξης. Καθώς έχουμε $f^{-1}f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, παραγωγίζοντας, έχουμε ότι ο Ιακωβιανός πίνακας είναι *αντιστρέψιμος*, με αντίστροφο τον $(DF(\mathbf{x})))^{-1} = Df^{-1}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$, όπου $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Σε μία διάσταση, αυτό δίνει τη γνωστή σχέση μεταξύ της παραγώγου συνάρτησης και της αντιστρόφου της $\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = 1/\frac{df}{dx}(x_0)$ (με $y_0 = f(x_0)$).

   Θεωρούμε τα καρτεσιανά γινόμενα $\mathcal{D} \times \mathbf{R}^n$ και $\mathcal{E} \times \mathbf{R}^n$, ώστε να μπορούμε να αναφερόμαστε σε διανύσματα στους ΔΧ $\{\mathbf{x}\} \times \mathbf{R}^n$ και $\{\mathbf{y}\} \times \mathbf{R}^n$ οι οποίοι είναι μετατοπισμένοι $\mathbf{R}^n$ στα σημεία $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ αντίστοιχα (για κάθε επιλογή σημείων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$). Δείξτε ότι σε κάθε σημείο του συνόλου $\mathcal{E}$ ορίζεται διατεταγμένη βάση του $\mathbf{R}^n$ ως οι n στήλες του Ιακωβιανού πίνακα. Καθώς έχουμε βάση σε κάθε σημείο και αυτή μεταβάλλεται, λέμε ότι έχουμε *κινούμενη βάση* του $\mathbf{R}^n$.

Οι γνωστές μας πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο κρύβουν αρκετά μυστικά και δίνουν ένα απλό, αλλά σημαντικό παράδειγμα διαφοράς μεταξύ τοπικά και ολικά αντιστρέψιμης συνάρτησης. Το κλειδί βρίσκεται στις δυσκολίες του ορισμού *γωνίας*.

4. **Πολικές συντεταγμένες:** Θεωρούμε το ανοικτό ημι-επίπεδο

$$\mathcal{D} = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 :\ r > 0\}$$

   και ορίζουμε απεικόνιση

$$\phi : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^2 :\ (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

(α΄) Δείξτε ότι σε κάθε σημείο του $\mathcal{D}$ ισχύει η συνθήκη του θεωρήματος της αντίστροφης συνάρτησης και επομένως για κάθε $(r_0, \theta_0) \in \mathcal{D}$ υπάρχει γειτονιά του $\mathcal{U}$ (π.χ. ανοικτός δίσκος) τέτοιος ώστε να έχουμε 1:1, επί απεικόνιση από το $\mathcal{U}$ στην εικόνα του $\phi(\mathcal{U})$, με λεία αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή τοπική αλλαγή μεταβλητών.

Ποιά είναι η συνολική εικόνα της ϕ, $\phi(\mathcal{D})$; Περιγράψτε επίσης την εικόνα κάθε οριζόντιας ημι-ευθείας $\{(r, \theta) \in \mathcal{D} : \theta = \theta_0\}$ και κάθε κάθετης ευθείας $\{(r, \theta) \in \mathcal{D} : r = r_0\}$ και σχεδιάστε κάποια τυπικά παραδείγματά τους. Εάν $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, δώστε την αντίστροφη εικόνα του σημείου, $\phi^{-1}(x_0, y_0)$.

Εξηγήστε επομένως γιατί δεν έχουμε αλλαγή μεταβλητών σε όλο το ημι-επίπεδο $\mathcal{D}$ και τον λόγο για τον οποίο περιορίζουμε την ¨γωνία¨ θ σε διάστημα πλάτους 2π (π.χ. $0 < \theta < 2\pi$).

(β΄) Δώστε τις εικόνες των συνήθων διανυσμάτων βάσης του ΕΔΧ $\mathbf{R}^2$, $(1, 0), (0, 1)$

Εφαρμόστε την παραπάνω διαδικασία και βρείτε την κινούμενη βάση που παίρνουμε από τον ορισμό πολικών συντεταγμένων (r, θ) στο επίπεδο (χρειάζεται προσοχή στον ορισμό του πεδίου ορισμού τους):

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Κάνετε σχήμα με ενδεικτικά σημεία του επιπέδου και τις αντίστοιχες βάσεις.

5. Δώστε τον πίνακα A της γραμμικής απεικόνισης $p \mapsto p'$ ¨παραγώγισης¨ στο Δ.Χ. πολυωνύμων βαθμού το πολύ n ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Επαληθεύστε ότι ο A^2 δίνει διπλή παραγώγιση και δείξτε ότι $A^{n+1} = 0$ (λέμε ότι ο A είναι μηδενοδύναμος).

6. Δώστε τουλάχιστον δύο διαφορετικές αποδείξεις της ανισότητας Cauchy-Schwartz και με χρήση της, δείξτε την τριγωνική ανισότητα στο $\mathbf{R}^n$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Μην ξεχάσετε να αναφερθείτε στις περιπτώσεις όπου έχουμε ισότητα.

7. *Γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου:* Ο ορισμός του εξωτερικού γινομένου στο $\mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin \theta \, \mathbf{n},$$

περιλαμβάνει το γεωμετρικά προφανές εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα δύο διανύσματα, αλλά δεν εξηγεί την παρουσία του δισκάθετου $\mathbf{n}$.

Θυμίζουμε από το Λογισμό την έννοια της **ροής** ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ διαμέσου προσανατολισμένης επιφάνειας Σ:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

όπου ο προσανατολισμός δίνεται από το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{n}$, κάθετο στην επιφάνεια. Εξηγήστε γιατί είναι λογικό να δίνεται το στοιχείο ροής διαμέσου επιφάνειας από το $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ και σχετίστε το με τον παραπάνω ορισμό του εξωτερικού γινομενου.

8. *Γραμμικοποίηση:* Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = (x^3 - xy^2, -y^3 + xy)$. Υπολογίστε την παράγωγο Df της f. Δείξτε ότι στο σημείο $(x_0, y_0) = (2, 2)$ η συνάρτηση είναι τοπικά αντιστρέψιμη.

   Συγκρίνετε την ακριβή τιμή του διανύσματος διαφοράς $f(2.2, 1.8) - f(2, 2)$ με την προσεγγιστική τιμή που δίνει η γραμμικοποίηση:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \simeq Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix},$$

   εδώ:

$$(x, y) = (2.2, 1.8),\ (x_0, y_0) = (2, 2).$$

Στον ΔΧ $\mathbf{R}^3$ υπάρχουν άπειρες άλλες επιλογές *εσωτερικού γινομένου*, εκτός του κανονικού που έχουμε αναφέρει. Το γενικό εσωτερικό γινόμενο το γράφουμε με αγκύλες: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

9. Δώστε αποδείξεις όσων από τα παρακάτω δεν έχετε συναντήσει:

   (α΄) Οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού τετραγωνικού πίνακα είναι όλες πραγματικές.

   (β΄) Ο συμμετρικός τετραγωνικός Q λέγεται **θετικά ορισμένος** εάν για κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \neq 0$, η τιμή της τετραγωνικής συνάρτησης $q(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot Q\mathbf{v}$ είναι θετική. Ισοδύναμες συνθήκες είναι: (α) όλες οι ιδιοτιμές του Q είναι θετικές και (β) όλες οι κύριες ελάσσονες ορίζουσες του Q είναι θετικές.

   Κατόπιν, δείξτε ότι ορίζεται μέσω του Q *εσωτερικό γινόμενο* στο $\mathbf{R}^n$ ως εξής:

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >_Q = \mathbf{u} \cdot Q\mathbf{v},$$

   όπου $\cdot$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Τέλος, δείξτε ότι ο πίνακας

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   είναι θετικά ορισμένος και βρείτε διάνυσμα $\mathbf{v}$ ορθογώνιο στο $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ ως προς το νέο αυτό εσωτερικό γινόμενο.

10. (α΄) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3y_1y_2 + 2y_1z_2 + 2z_1y_2 + 5z_1z_2$$

   ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbf{R}^3$.

   (β΄) Δώστε τη συνάρτηση μέτρου που δίνει το γινόμενο αυτό. Βρείτε το μέτρο του διανύσματος $(3, 3, -2)$ καθώς και την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο διάνυσμα αυτό, ως προς τη συνάρτηση μέτρου που βρήκατε.

11. (α΄) Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

   όπου $a, b, c \in \mathbf{R}$ και δείξτε επομένως ότι για a, b, c διακριτές τιμές, τα τρία διανύσματα σειράς αποτελούν βάση του $\mathbf{R}^3$.

(β′) Δείξτε ότι τα διανύσματα $\mathbf{b}_1 = (1,0,0), \mathbf{b}_2 = (1,1,1)$, $\mathbf{b}_3 = (1,2,4)$ δίνουν βάση του $\mathbf{R}^3$. Εφαρμόστε τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt στην διατεταγμένη βάση $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ και κατόπιν την ίδια μέθοδο στη βάση με διάταξη $(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3)$.

Τί παρατηρείτε και γιατί; Δώστε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο ανάπτυγμα $\mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$.

ΕΚ, 24/10/2018