Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων

Αναλυτικη Γεωμετρια Ι

Τρίτη Εργασία: Αφινικοί Χώροι ΙΙ, Προβολική Γεωμετρία και Ευκλείδειοι Χώροι

Αλλαγή βάσης σε ΑΧ

1. Στο αφινικό επίπεδο $2x + y + 3z = 6$ δώστε την αλλαγή βάσης από την αφινική βάση $\{(3, 0, 0), (0, 6, 0), (0, 0, 2)\}$ στην $\{(-1, 5, 1), (0, 3, 1), (2, 2, 0)\}$ Επαληθεύστε και ότι η δεύτερη τριάδα σημείων δίνει πράγματι βάση.

2. Σε αφινικό επίπεδο $\mathbf{A}^2$ έχουμε βάση (a_0, a_1, a_2). Βρείτε τιμές της παραμέτρου k για τις οποίες τα τρία σημεία

$$a'_0 = (a_1 + 2a_2)/3,\ a'_1 = (-a_0 + 3a_1)/2,\ a'_2 = (a_0 + ka_2)/(1 + k)$$

δεν ορίζουν αλλαγή βάσης. Δώστε την αλλαγή βάσης όταν υπάρχει.

Τετραγωνικές καμπύλες

Θεωρούμε τετραγωνικά πολυώνυμα σε δύο μεταβλητές:

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = [x, y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2[d, e] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f,$$

Ορίζοντας συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

και τα διάνυσματα

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix},$$

έχουμε την πιο συμπαγή μορφή

$$q(x, y) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} + f.$$

Για την εφαρμογή των κριτηρίων ταξινόμησης, θα χρειαστούμε και τον επαυξημένο πίνακα

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & f \end{bmatrix}.$$

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω τετραγωνικές εξισώσεις $q(x,y)=0$, δώστε τους πίνακες A και $\tilde{A}$ και το διάνυσμα $\mathbf{b}$ και επομένως, υπολογίζοντας τις ορίζουσες των A, $\tilde{A}$, αναγνωρίστε τις τετραγωνικές καμπύλες που προκύπτουν. Δώστε την αφινική κανονική τους μορφή.

   (α΄) $3y^2+4xy-2x+5y+1=0$

   (β΄) $x^2-4xy+4y^2+3x-4y=0$

   (γ΄) $3y^2+4xy+2x^2-2x+5y+1=0$

   (δ΄) $-8x^2+3y^2-10xy+14x-3=0$

   (ε΄) $3y^2+4xy+2x^2-2x+5y+15=0$

4. Για κάθε μία από τις παραπάνω καμπύλες, βρείτε διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ (εάν υπάρχει), ώστε να έχουμε τη μορφή
$$q(x,y)=(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\tilde{f}=0,$$
   δηλαδή να απαλείφονται οι γραμμικοί όροι. Κατόπιν, βρείτε τις ιδιοτιμές και ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του A και επομένως, δώστε τον αφινικό μετασχηματισμό που μετατρέπει το τετραγωνικό πολυώνυμο στην αφινική κανονική του μορφή.

Προβολική Γεωμετρία

Ο ορισμός του προβολικού χώρου που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ως εξής: ο $\mathbf{R}P^2$ ορίζεται ως το σύνολο με στοιχεία τις κλάσεις ισοδυναμίας στο $\mathbf{R}^3-\{0\}$ για την σχέση ισοδυναμίας:
$$(X,Y,Z)\sim(X',Y',Z')\iff \exists k\in\mathbf{R}, k\neq 0: X'=kX,\ Y'=kY,\ Z'=kZ.$$
Ένα στοιχείο του $\mathbf{R}P^2$ είναι λοιπόν μιά ευθεία που περνά από το 0 αλλά δεν περιλαμβάνουμε το μηδενικό του διάνυσμα.Γράφουμε $[X:Y:Z]$ για την κλάση ισοδυναμίας των σημείων της που ονομάζουμε **ομογενείς** του συντεταγμένες. Αντίστοιχα ορίζεται και ο χώρος $\mathbf{R}P^1$ στο τρυπημένο επίπεδο $\mathbf{R}^2-\{0\}$.

5. Θεωρούμε τέσσερα διακριτά "σημεία" του προβολικού χώρου $\mathbf{R}P^1$, δηλαδή τέσσερις διακριτές ευθείες στο επίπεδο $\mathbf{R}^2$. Θεωρούμε μη-μηδενικά διανύσματα $\mathbf{v}_i$ $i=1,2,3,4$, ένα για κάθε ευθεία. Δείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε τα σημεία αυτά έτσι ώστε
$$\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 \quad \text{και} \quad \mathbf{v}_4=\mathbf{v}_1+k\mathbf{v}_2,$$
   για κάποια σταθερά k.

6. Στον χώρο $\mathbf{R}^3-\{\mathbf{0}\}$ θεωρούμε τους γεωμετρικούς τόπους που όρίζουν οι τετραγωνικές μορφές στις ομογενείς συντεταγμένες $[X:Y:Z]$ του προβολικού χώρου $\mathbf{R}P^2$
$$(i)\ 2X^2-3XY-Y^2+5XZ-2YZ=0, \quad (ii)\ X^2+XY+3Y^2-XZ-2Z^2=0,$$
$$(iii)\ X^2-Y^2-3Z^2+2XZ+4YZ=0.$$
   Περιγράψτε τί δίνει η κάθε μορφή. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του 3×3 πίνακα και με χρήση λογισμικού κάνετε τα σχήματα.

   Βρείτε τις καμπύλες στο αφινικό επίπεδο $\mathbf{A}^2=\{Z=1\}$ του προβολικού χώρου που αντιστοιχούν στις μορφές αυτές.

7. Δώστε τα ομογενή πολυώνυμα που αντιστοιχούν στα μη-ομογενή πολυώνυμα της άσκησης 3 και αναγνωρίστε τον τόπο που ορίζουν στο $\mathbf{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$. Οι καμπύλες που είχαμε στην προηγούμενη ενότητα είναι οι τομές με το αφινικό επίπεδο $\mathbf{A}^2 \subset \mathbf{R}P^2$ που αντιστοιχεί σε ομογενείς συντεταγμένες με $Z = 1$. Τί καμπύλες προκύπτουν εάν θεωρήσουμε την τομή με το αφινικό επίπεδο $Y = 1$;

Ευκλείδειοι ΔΧ και ΑΧ

Στο ΔΧ $\mathbf{R}^2$, θα γράφουμε $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ κ.ο.κ. για σημεία $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ως προς δοθείσα βάση.

8. Ποιές από τις παρακάτω διγραμμικές, συμμετρικές συναρτήσεις $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ορίζουν εσωτερικό γινόμενο;

   (α΄) $f = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 3x_2y_2$

   (β΄) $f = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$

   Δώστε τη συνάρτηση μέτρου που ορίζεται (όταν ορίζεται). Περιγράψτε τις καμπύλες $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) =$ σταθερό και στις δύο περιπτώσεις.

9. Σε ποιό εσωτερικό γινόμενο αντιστοιχεί η τετραγωνική μορφή

$$q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$$

   Βρείτε τις καμπύλες σταθερού μέτρου.

   Δώστε διάνυσμα κάθετο στο $(-2, 3)$ ως προς το εσωτερικό αυτό γινόμενο. Βρείτε επίσης τη γωνία μεταξύ του $(-2, 3)$ και του $(1, 2)$.

10. Ξεκινώντας από την διατεταγμένη βάση

$$b_1 = (1, 2, 0),\ b_2 = (-2, 1, 1),\ b_3 = (3, 0, 1)$$

   του $\mathbf{R}^3$, βρείτε ορθοκανονική βάση $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{span}(e_1) = \mathrm{span}(b_1),\ \text{και}\ \ \mathrm{span}(e_1, e_2) = \mathrm{span}(b_1, b_2).$$

11. Δώστε ορθοκανονικοποίηση της βάσης που βρήκατε για κάθε ένα από τα αφινικά επίπεδα στις ασκήσεις 2 και 6 της δεύτερης εργασίας.

   Με δεδομένη την ο.κ. βάση $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ σε κάθε περίπτωση, βρείτε την εξίσωση της καμπύλης που ορίζεται από την τετραγωνική εξίσωση ¨κύκλου¨ $x_1^2 + x_2^2 = 1$, όπου x_1, x_2 οι συντεταγμένες ως προς την αρχική αφινική βάση, δηλαδή για a σημείο του επιπέδου

$$a = a_0 + x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2.$$

12. Βρείτε τις Ευκλείδειες κανονικές μορφές για κάθε μία από τις τετραγωνικές καμπύλες της παραπάνω τρίτης άσκησης της παρούσας εργασίας.

ΕΚ, 1-6-18