ΑΓ-Ι Τετραγωνικές "καμπύλες" [Final version!] 1

5/5/18

Έχουμε διαθέσιμα τα αποτελέσματα:

1) Φασματικό θεώρημα (A συμμ $\Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$ και $\exists$ ορθ βάση ι-διαν)

2) Για 2×2 πίνακες, $\det A = \lambda_1\lambda_2$ και $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$

3) Ορίζουσες block πινάκων

(α) $\det \begin{array}{c|cc} & & \\ k & A & B \\ \ell & 0 & D \\ & k & \ell \end{array} = \det A \det D$, $\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det D$

<u>Πόρισμα</u>: Εάν ο $k\times k$ A είναι αντιστρέψιμος

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B)$$

4) Η αφαλλαγή μεταβλητών $\vec{x} = P\vec{z} + \vec{b}$ δίνει

$$\tilde{q}(\vec{z}) = \vec{z}^T P^T C_1 P \vec{z} + 2(\vec{b}^T C_1 + \vec{d}^T) P \vec{z} + q(\vec{b})$$

με $q(\vec{b}) = \vec{b}^T C_1 \vec{b} + 2\vec{d}^T \vec{b} + f$

5) Εάν $\det C_1 \neq 0$, ο γραμμικός όρος αναλείφεται επιλέγοντας $\boxed{\vec{b} = -C_1^{-1}\vec{d}}$. Έτσι $\boxed{q(\vec{b}) = f - \vec{d}^T C^{-1} \vec{d}}$

6) Επιλέγοντας $P = U$, $U = (u_1\, u_2 \ldots u_n)$ ορθ ι-διαν δίνει

$U^T C U = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ και τετρ. μέρος $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2$

Με περαιτέρω κλιμάκωση, έχουμε τις εξής 3 πιθανές μορφές του τετρ. μέρους:

(i) $z_1^2 + z_2^2$

(ii) $z_1^2 - z_2^2$

(iii) z_1^2

—u—

<u>Θεώρημα</u>: Με αφ αλλ. αντικ. μία τετραγ. εξίσωση δίνει μία από τις παρακάτω (<u>αφινικές</u> <u>κανονικές</u>) <u>μορφές</u>

1) $z_1^2 + z_2^2 = 1$ κύκλος

2) $z_1^2 + z_2^2 = 0$ σημείο

3) $z_1^2 + z_2^2 = -1$ κενό

4) $z_1^2 - z_2^2 = 1$ υπερβολή

5) $z_1^2 - z_2^2 = 0$ τεμνόμενες ευθείες

6) $z_1^2 - z_2 = 0$ παραβολή

7) $z_1^2 = 1$ παράλ. ευθείες

8) $z_1^2 = 0$ διπλή ευθεία

9) $z_1^2 = -1$ κενό

Αναγνώριση κανονικής μορφής: [Για να αποφύγουμε όλη τη δουλειά της εύρεσης της αφ αλλαγής δηλαδή των P και $\vec{b}$]

Ορίζουμε $C_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, επαυξημένο πίνακα $\tilde{C} = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & d \\ b & c & e \\ \hline d & e & f \end{array}\right]$

(συμμετρικοί πίνακες)

Παρατηρούμε ότι:
- $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$ θετικές
- $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A < 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0$ αρνητικές
- $\det A < 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 < 0$ ετερόσημες

ΑΓ-Ι

5/5/18

Κριτήρια: Ι. Αντιστρέψιμος C ($\det C \neq 0$)

1) $z_1^2+z_2^2=1 \iff \det C>0$, $\mathrm{tr}\, C>0$ και $\det\tilde{C}<0$; $\mathrm{tr}\, C<0$ και $\det\tilde{C}>0$ ← NB New

2) $z_1^2+z_2^2=0 \iff \det C>0$ και $\det\tilde{C}=0$

3) $z_1^2+z_2^2=-1 \iff \det C>0$, $\mathrm{tr}\, C>0$ και $\det\tilde{C}>0$; $\mathrm{tr}\, C<0$ και $\det\tilde{C}<0$ ← NB New

4) $z_1^2-z_2^2=1 \iff \det C<0$ και $\det\tilde{C}\neq 0$

5) $z_1^2-z_2^2=0 \iff \det C<0$ και $\det\tilde{C}=0$

Απόδειξη:

Λήμμα: $\det C\neq 0 \Rightarrow \det\tilde{C}=\det C\cdot(f-\vec{d}^T C^{-1}\vec{d})$

Απ. Από πρόταση για block πίνακες! □

(1)a) $\det C>0$, $\mathrm{tr}\, C>0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2>0$. Με απαλοιφή των γραμμικών όρων: $q(\vec{z})=z_1^2+z_2^2+q(\vec{b})$

Αλλά $q(\vec{b})=f-\vec{d}^T C^{-1}\vec{d}$, οπότε αν $\det\tilde{C}<0$, έχουμε $q(\vec{b})<0$ και $q(\vec{z})=0 \Rightarrow z_1^2+z_2^2=\underbrace{-q(\vec{b})}_{>0}$

Τελική κλιμάκωση δίνει κύκλο

b) $\det C>0$, $\mathrm{tr}\, C<0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2<0$. Όπως και πριν $\det\tilde{C}>0$ σημαίνει $q(\vec{b})>0$, οπότε $-z_1^2-z_2^2+\underbrace{q(\vec{b})}_{>0}=0$ δίνει πάλι κύκλο, με αλλαγή προσήμων.

(2) Εδώ έχουμε $\pm(z_1^2+z_2^2)+0=0$, καθώς $q(\vec{b})=0$

(3) Όπως και στα 1a, 1b, με $q(\vec{b})$ αντίθετα πρόσημα

(4) $\det C<0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2<0$. Καθώς $\det\tilde{C}\neq 0$, $q(\vec{b})\neq 0$ και έχουμε $z_1^2-z_2^2+q(\vec{b})=0$ ή $-z_1^2+z_2^2+q(\vec{b})=0$ που δίνει υπερβολή

(5) $\det\tilde{C}=0 \to q(\vec{b})=0$ □

Παραδείγματα: (α) $2xy-5y^2+10x-6y+3=0$

$$C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -5\end{bmatrix},\quad \tilde{C}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 5\\ 1 & -5 & -3\\ \hline 5 & -3 & 3\end{array}\right]$$

Καταρχήν υπολογίζουμε: $\det C=-1<0$, $C^{-1}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$\det\tilde{C}=-15-15+125-3=92$

$f-\vec{d}^T C^{-1}\vec{d}=3-(5,-3)\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ -3\end{bmatrix}=3-(5,-3)\begin{bmatrix}22\\ 5\end{bmatrix}=$

$=3-(110-15)=-92$

Καθώς $\det C<0$, $\det\tilde{C}\neq 0$, έχουμε υπερβολή

5/5/18

<u>Κριτήρια</u> ΙΙ $\det C=0$ (μορφές 6–9)

<u>Προσεγγιστικά:</u> Αν $C_1=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ συμμ. είναι $\det C=0$ τότε $ac-b^2=0$

Υπάρχουν 2 περιπτώσεις: $\boxed{b=0} \Rightarrow a=0$ ή $c=0$ που είναι $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ή $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & c\end{bmatrix}$, το <u>ίδιο</u> με αναδιάταξη.

$\boxed{b\neq 0} \Rightarrow a, c\neq 0$ και $c=b^2/a$, δηλ. $C_1=\begin{bmatrix}a & b\\ b & b^2/a\end{bmatrix}$

Με αναδιατάξεις, έχουμε $\begin{bmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta\\ \alpha\beta & \beta^2\end{bmatrix}$, αν $a, c>0$ (και $-\alpha^2, -\beta^2$ αν <0)

Στην πρώτη περίπτωση, τετρ. μορφή είναι ax^2

Στη δεύτερη, $\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2=(\alpha x+\beta y)^2$

τέλειο τετράγωνο

7/5/18 Και στις δύο περιπτώσεις, λοιπόν, έχουμε <u>τέλειο</u> τετράγωνο

Οδηγούμαστε έτσι στα

<u>Κριτήρια</u> (για περιπτώσεις 6–9, όπου $\det C=0$)

(6) $z_1^2-z_2=0$ (παραβολή) $\longleftrightarrow$ $\det C=0$, αλλά $\det\tilde{C}\neq 0$

Ορίζουμε $C''=\begin{bmatrix}a & d\\ d & f\end{bmatrix}$ και $C'''=\begin{bmatrix}c & e\\ e & f\end{bmatrix}$

(7) $\underset{\text{παράλληλες}}{z_1^2=1}$ $\longleftrightarrow$ $\det C_1=0$, $\det\tilde{C}=0$ & $\det C''<0$ (ή $\det C'''<0$)

(8) $\underset{\text{διπλή}}{z_1^2=0}$ $\longleftrightarrow$ $\det C_1=0$, $\det\tilde{C}=0$ & $\det C''=0$ (ή $\det C'''=0$)

(9) $\underset{\text{κενό}}{z_1^2=-1}$ $\longleftrightarrow$ $\det C_1=0$, $\det\tilde{C}=0$ & $\det C''>0$ (ή $\det C'''>0$)

<u>Απόδειξη:</u> (6) Θεωρούμε τις 2 περιπτώσεις:

Αν $\boxed{b=0} \to C_1=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $(a\neq 0)$ και $\tilde{C}=\begin{bmatrix}a & 0 & d\\ 0 & 0 & e\\ d & e & f\end{bmatrix}$,

$\det\tilde{C}=-ae^2$. Αν $\det\tilde{C}\neq 0$, αυτό σημαίνει $e\neq 0$ και έχουμε $ax^2+ey+\ldots=0$ το οποίο, με απλή αλλαγή μεταβλητών, είναι παραβολή (<u>άσκηση.</u>) [Παρόμοια αν $C_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & c\end{bmatrix}$, $\tilde{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & d\\ 0 & c & e\\ d & e & f\end{bmatrix}$, $\det\tilde{C}=-cd^2 \Rightarrow d\neq 0$]

Αν $\boxed{b\neq 0}$ $(a, b\neq 0)$ $\tilde{C}=\begin{bmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta & d\\ \alpha\beta & \beta^2 & e\\ d & e & f\end{bmatrix}$

και $\det\tilde{C}=\cancel{\alpha^2\beta^2 f}+2\alpha\beta ed-\beta^2d^2-\alpha^2e^2-\cancel{\alpha^2\beta^2 f}=\underline{-(\alpha e-\beta d)^2}$

Από όμως σημαίνει ότι, θέτοντας $z=\alpha x+\beta y \to x=\dfrac{z-\beta y}{\alpha}$, $y=y$

έχουμε $\underline{\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2}+2dx+2ey+f$

$$z^2+\left(2d\left(\frac{z-\beta y}{\alpha}\right)\right)+2ey+f=0$$

$$z^2+\frac{2dz}{\alpha}\underbrace{-2\frac{\beta d}{\alpha}y+2ey}_{\frac{2(\alpha e-\beta d)y}{\alpha}\ \neq 0 \text{ (καθώς) } \det\tilde{C}\neq 0}+f=\left(z+\frac{d}{\alpha}\right)^2+\overset{\neq 0}{k'}y+f'=0$$

Τελειώσαμε! (με προφανή αντικατάσταση)

Συνέχεια Απόδειξης κριτηρίων για 7-9. 5/5/18

Καθώς $\det C = 0$, $\det \tilde{C} = 0$, συνεχίζουμε τις 2 περιπτώσεις

$b=0 \to \tilde{C} = \left[\begin{array}{cc|c} a & 0 & d \\ 0 & 0 & e \\ \hline d & e & f \end{array}\right]$ και $\det\tilde{C} = -ae^2$ οπότε $\det\tilde{C} = 0 \Rightarrow e = 0$

και $\tilde{C} = \begin{bmatrix} a & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & f \end{bmatrix}$ και η τετραγ. συνάρτηση είναι

$$ax^2 + 2dx + f = a\left(x^2 + 2\frac{d}{a}x + \frac{d^2}{a^2}\right) - \frac{d^2}{a} + f = 0$$

Καθώς $a \neq 0$, έχουμε, ισοδύναμα, ότι $a^2\left(x + \frac{d}{a}\right)^2 + (af - d^2) = 0$

Αλλά $\det C'' = \det\begin{bmatrix} a & d \\ d & f \end{bmatrix} = af - d^2$

και παίρνουμε αμέσως τις περιπτώσεις 7, 8, 9!

η Green → (Αντίστοιχα για $C' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, με $\det C''' \neq 0$ ($\gtrless 0$))

$b \neq 0$ (οπότε και $a \neq 0$), (αλλάζοντας $a = \alpha^2$, $b = \alpha\beta$, $c = \beta^2$,

έχουμε $\tilde{C} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & d \\ \alpha\beta & \beta^2 & e \\ d & e & f \end{bmatrix}$ και είδαμε ότι

$\det\tilde{C} = -(\alpha e - \beta d)^2$. Έτσι, $\det\tilde{C} = 0$ δίνει $\alpha e - \beta d = 0$.

Είδαμε ότι η τετραγ. συνάρτηση είναι

$$(\alpha^2x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2y^2) + 2dx + 2ey + f = 0$$

$$\underbrace{(\alpha x + \beta y)^2}_{z^2} + 2d\left(\frac{z - \beta y}{\alpha}\right) + 2ey + f = 0$$

$$z^2 + 2\frac{d}{\alpha}z + \overset{\text{όπως είδαμε}}{0}y + f = 0$$

Λήμμα: $A, B \neq 0 \Rightarrow Ax^2 + By + C = 0$ είναι παραβολή. Απόδ: Άσκηση!

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο,

$$\left(z + \frac{d}{\alpha}\right)^2 - \frac{d^2}{\alpha^2} + f = 0 \iff \left(z + \frac{d}{\alpha}\right)^2 + \frac{\alpha^2 f - d^2}{\alpha^2} = 0$$

Αλλά $\alpha^2 = a$ και έχουμε ό,τι και στην-Είδους!! □

—n—

Παρατήρηση:

Φυσικά, στην πράξη υπάρχει και πιο "άμεση" μέθοδος! αφού, όπως είδαμε, στην περίπτωση $\det C = 0$, έχουμε τέλειο τετράγωνο στους τετρ. όρους, απλά με αλλαγή μεταβλητής, αν χρειαστεί (αναλόγως $z = \alpha x + \beta y$) βλέπουμε αν μένει ή όχι άλλος γραμμ. όρος, αφού "συμπληρώσαμε" το τετράγωνο στο z.

π.χ. $q(x,y) = (x \ y)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 3x + 5y + 7 = 0$, $\det C_1 = 1 - 1 = 0$

Έχουμε $z \to x = z + \frac{y}{2}$

$$q = \underbrace{2x^2 - 2xy + \frac{y^2}{2}}_{2\left(x^2 - 2\frac{1}{2}xy + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)} + 3x + 5y + 7 = 2\Big(\underbrace{x - \frac{y}{2}}_{z}\Big)^2 + 3x + 5y + 7 = 0$$

$$= 2z^2 + 3\left(z + \frac{y}{2}\right) + 5y + 7 =$$

$$= 2\left(z^2 + 2\frac{3}{2}z + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \frac{9}{2} + \underbrace{\frac{3}{2}y + 5y}_{\Rightarrow \text{παραβολή}} + 7$$