ΠΡΟΒΟΛΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ & ΠΡΟΒ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 9/5/18

Με τον ορισμό ενός Α.Χ, απελευθερώσαμε την γεωμετρία από την τεχνητή επιλογή διακεκριμένων σημείων, της "αφετηρίας" ενός Δ.Χ. Είδαμε επίσης ότι καταλήξαμε να έχουμε ορίσει ένα "νέο" είδος Γεωμετρίας, όπου κάθε τρίγωνο είναι "όμοιο"/ισοδύναμο με κάθε άλλο, αλλά διατηρείται η παραλληλία, καθώς και οι λόγοι σημείων πάνω σε ευθεία (ή άλλο affspan), ως προς επιλογή "βάσης" του.

Παρ' όλα αυτά, αναρωτιόμαστε αν είναι απαραίτητο να διακρίνουμε "περιπτώσεις" για σημεία τομής ευθειών σε Αφ. Επίπεδο: αν τέμνονται, έχουμε μοναδικό σημείο, ενώ αν είναι παράλληλες, δεν έχουμε σημείο τομής.

X^2 (ή A^2)

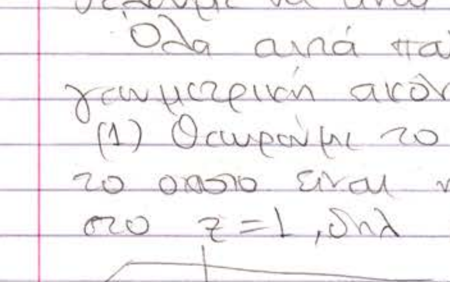
Θα ορίσουμε τώρα μια (εξαιρετικά ενδιαφέρουσα) νέα Γεωμετρία, όπου και οι δύο παραπάνω περιπτώσεις θεωρούνται ως "ίδιες" — και έχουμε πάντα ένα & μοναδικό σημείο τομής ακόμα και για παράλληλες ευθείες!

Ιστορικά, από εκεί τις ρίζες του

1η προσέγγιση: Θέλουμε να προσδιορίσουμε "σημείο τομής" δύο παράλληλων ευθειών. Διαισθητικά, είναι ένα σημείο στο άπειρο, αλλά στην κατεύθυνση που έχουν από κοινού οι 2 ευθείες. Γιατί όχι δύο σημεία, τότε; (ένα από κάθε άκρο) Αυτό θα κάλυπτε την ομοιομορφία των περιπτώσεων και αρχικά και έπειτα από το "σημείο στο άπειρο" (point at infinity) θέλουμε να είναι το ίδιο από όποια μεριά και να δούμε το "όριο".

Όλα αυτά παίρνουν αυστηρό ορισμό με την εξής γεωμετρική εικόνα:

(1) Θεωρούμε το αφ. επίπεδο A^2 ως το επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ το οποίο είναι η μετατόπιση του οριζοντίου επιπέδου $\{z=0\}$ στο $z=1$, δηλ. $A^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=1\}$



Παρατηρούμε ότι κάθε σημείο $a\in A^2$ ορίζει μοναδική ευθεία στο $\mathbb{R}^3$ που περνά από το $\vec{0}\in\mathbb{R}^3$

(Θυμ. την κατηγορία παραδ. Α.Χ, ως είναι το σύνολο των μετατοπισμένων του οριζ. επιπέδου, και είδαμε ότι είναι ακριβώς ο Α.Χ $z=1$!)

Μετακινούμε το ενδιαφέρον μας λοιπόν στο σύνολο όλων των ευθειών στο $\mathbb{R}^3$ που περνούν από το $\vec{0}$ (δηλ. 1διάστ. ΔΧ)

9/5/18

Έχουμε βρει το παρόν κατόπιν όλο το A^2 με αρχαία των συνόλων αυτών. Τι λείπει; Μα όλες οι "οριζόντιες" ευθείες. Ε, λοιπόν, αυτές θα μας δώσουν όλα τα προ-αναφερθέντα "σημεία στο άπειρο" που χρειαζόμαστε για να έχουμε ένα σημείο τομής για κάθε ζεύγος ευθειών!!

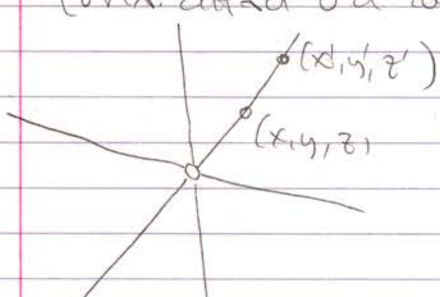
Προσοχή: Η προσέγγιση αυτή, που αντιστοιχεί 1-1 τα σημεία του AX A^2 με ευθείες, μας καλεί να θεωρήσουμε κάθε ευθεία (1d υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$) ως ένα "σημείο" του καινούριου μας συνόλου. Για να μην μπερδευόμαστε, θα συνεχίσουμε να αναφερόμαστε σε σημεία ως τα στοιχεία AX (εδώ του A^2) και "σημεία" (σε εισαγωγικά) που είναι ευθείες $\subset \mathbb{R}^3$!

Ο τυπικός ορισμός έχει ως εξής [κάνει χρήση των γνωστών εννοιών της σχέσης και κλάσης ισοδυναμίας που συναντήσατε στην Εισαγωγή στην Άλγεβρα]

Ορισμός: Το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που παίρνουμε από το $\mathbb{R}^3 - \{\bar{0}\}$ (NB: χωρίς την αφετηρία, καθώς είναι το κοινό σημείο όλων των ευθειών) επιβάλλοντας την σχέση ισοδυναμίας

$$(x,y,z)\sim(x',y',z') \iff \exists k\neq 0 \text{ τ.ω. } (x',y',z')=k(x,y,z)$$

[δηλ. απλά ότι τα δύο σημεία βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία]



[Άσκηση: δείξτε ότι έχουμε ισοδυναμία]

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε σχέση ισοδυναμίας διαμοιράζει (partitions) το σύνολο σε ξένες μεταξύ των κλάσεις ισοδυναμίας — εδώ τις ευθείες, χωρίς το σημείο $\bar{0}$.

Για παράδειγμα, για $n>1$ ακέραιο, έχουμε την σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{Z}$:

$$m\sim m' \iff n \mid m-m' \quad (\text{δηλ } m=m'+qn, \exists q)$$

Έχουμε ακριβώς n κλάσεις ισοδυναμίας, που γράφουμε

$\{\ldots,-n,0,n,2n,\ldots\}$

$\{\ldots,-n+1,1,n+1,2n+1,\ldots\}$

$\{\ldots,-1,n-1,2n-1,3n-1,\ldots\}$

και συνήθως παριστάνουμε με "αριθμητικό" σύμβολο

$\bar{0},\bar{1},\ldots,\overline{n-1}$ ή $[0],[1],\ldots,[n-1]$

καθώς θεωρούμε ότι κάθε ακέραιος, όταν διαιρείται με το n δίνει υπόλοιπο έναν από τους αριθμούς $0,1,\ldots,n-1$.

Το σημαντικό όμως είναι ότι κάθε σύμβολο $\bar{i}$ ή $[i]$ είναι σύνολο, και η επιλογή ψηφίου είναι απλά επιλογή αντιπροσώπου κάθε κλάσης ισοδυναμίας

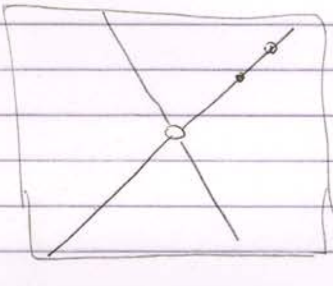
over

9/5/18

Έτσι λοιπόν κι εδώ, αν θα μπορούσαμε να επιλέξουμε ένα σημείο από κάθε ευθεία, ως "αντιπρόσωπό της", θα είχαμε μια καλύτερη γεωμετρική εικόνα του τι είναι το νέο σύνολο που ορίσαμε, το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$.

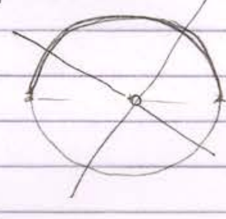
Ας θεωρήσουμε (και ως δυνατό, βασικό παράδειγμα) την πιο απλή περίπτωση:

<u>Ορισμός</u> Η <u>προβολική ευθεία</u> $\mathbb{R}P^1$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που παίρνουμε από το "τρυπημένο επίπεδο" $\mathbb{R}^2-\{\bar{0}\}$ επιβάλλοντας την σχέση ισοδυναμίας $(x,y)\sim(x',y') \iff \exists k\neq 0: (x',y')=k(x,y)$ (δηλ. και πάλι, τα σημεία κείνται στην ίδια ευθεία.)



Τώρα είναι πιο εύκολο να βρούμε αντιπροσώπους: θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο $S^1=\{x^2+y^2=1\}\subset\mathbb{R}^2$. Κάθε ευθεία/"σημείο" τέμνει τον S^1 σε δύο (μόνον) σημεία. Ας επιλέξουμε συστηματικά ένα από αυτά:

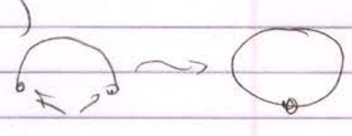
(όπου $y\neq 0$) Για κάθε μη-οριζόντια ευθεία, επιλέγουμε το σημείο τομής με το <u>άνω</u> ημικύκλιο.



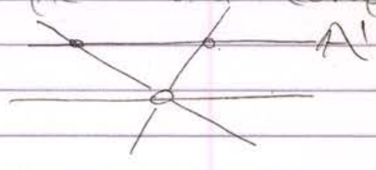
Μένει μόνο η (μία και μόνο) οριζόντια ευθεία. Εδώ απλά ταυτίζουμε τα αντιδιαμετρικά σημεία (από την ΣΙ'). Το αποτέλεσμα είναι:

Το άνω ημικύκλιο S^1_+ είναι μοναδικούς αντιπροσώπους για όλες τις ευθείες/"σημεία" του $\mathbb{R}P^1$, εκτός μίας, όπου ταυτίζουμε τα σημεία $(-1,0)$ και $(1,0)$

[Το αποτέλεσμα ως σύνολο, είναι —και πάλι κύκλος! δηλ. $\mathbb{R}P^1\cong S^1$!]



Θα μπορούσαμε να πάρουμε, κατ' αναλογία με αυτό που κάναμε στο $\mathbb{R}P^2$, την αφινική ευθεία $\{y=1\}$. Καλύπτει ακριβώς το ίδιο υποσύνολο αν κάλυπτε και το (ανοικτό) άνω τόξο/ημικύκλιο $S^1_+=\{(x,y)\in S^1, y>0\}$



Πρέπει λοιπόν να προσθέσουμε ένα (και μοναδικό) <u>σημείο</u> <u>στο άπειρο</u> για να μετατρέψουμε την αφ. ευθεία A^1 στην προβολική $\mathbb{R}P^1$

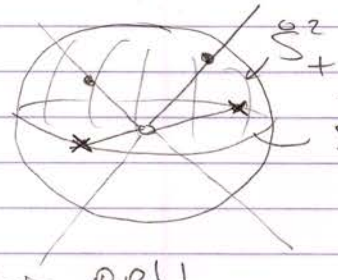
Cross ratio/aff. ratios

9/5/18

Επιστρέφοντας στο $\mathbb{R}^3-\{0\}$ και την ΣΙ $\sim$
Είναι φυσικό να θεωρήσουμε, αντί του κύκλου S^1, την σφαίρα $S^2=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\}$

Διακρίνουμε, και πάλι, μη-οριζόντιες ευθείες, οι οποίες έχουν μοναδικό "αντιπρόσωπο" στο άνω (ανοικτό) ημισφαίριο $\mathring{S}^2_+ = \{(x,y,z)\in S^1, z>1\}$
και οριζόντιες, όπου έχουμε την ταύτιση
$(x,y,0)\sim(-x,-y,0)$ αντιδιαμετρικών σημείων του ισημερινού.

Σχηματικά.

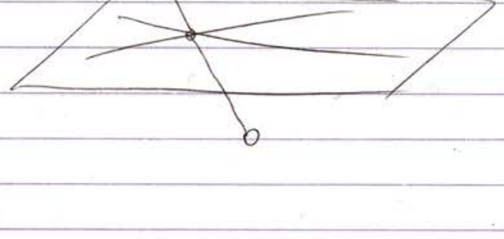


(Παρατηρούμε ότι στον ισημερινό, έχουμε ακριβώς το πλαίσιο που είχαμε στην προβ. ευθεία $\mathbb{RP}^1$!
Η τοπολογική διαδικασία ταυτίσεων που προκύπτει είναι δύσκολο να περιγραφεί, και δεν έχουμε το αντίστοιχο της 1:1 αντιστοιχίας $\mathbb{RP}^1\cong S^1$. Έχουμε κάτι πιο "περίεργο" - που παριστάνεται ως το cross-cap κτλ
→ Show YouTube Videos ...?]

Πάντως και στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι το σύνολο $\mathbb{RP}^2$ κατ' αρχήν "έχει διάσταση 2" (καθώς τοπικά είναι σαν κομμάτι σφαίρας ή αφινικού επιπέδου!) και είναι επίσης συμπαγές (έννοια που θα δείτε στην Τοπ. Μετρ. Χώρων κτλ.)

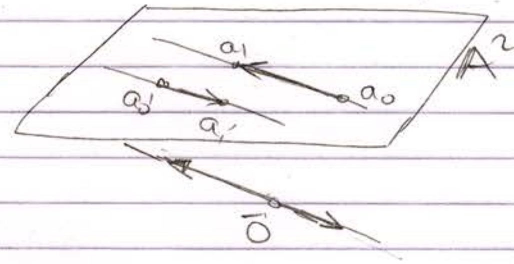
Είμαστε έτοιμοι τώρα να εξηγήσουμε την ομοιογένεια των τομών ευθειών (ανεξάρτητα της εγκαρσιότητας ή παραλληλίας τους.)
ΝΒ: Εφιστούμε την προσοχή σας στην διάκριση σημείων $a\in A^2$ (ΑΧ) και "σημείων"/ευθειών/ΚΙ $\in\mathbb{RP}^2$

Στο αφινικό A^2 (που θεωρούμε εμφυτευμένο ως το οριζόντιο επίπεδο $\{z=1\}\subset\mathbb{R}^3-\{0\}$), θεωρούμε δύο ευθείες που δεν συμπίπτουν.
Εάν είναι εγκάρσιες (μη-παράλληλες), τέμνονται σε ένα (μοναδικό) σημείο του A^2. Το σημείο αυτό δίνει προφανώς μοναδικό "σημείο" του προβ. χώρου:



Τώρα, αν οι ευθείες είναι παράλληλες,
πχ $l_1 = \text{affspan}(a_0, a_1)$ και $l_2 = \text{affspan}(a_0', a_1')$
τότε, όπως ξέραμε $a_1 - a_0$ και $a_1' - a_0'$ είναι διανύσματα $\bar{b}_1, \bar{b}_1'$ $(\neq \bar{0})$ τ.ω. $\text{span}(\bar{b}_1) = \text{span}(\bar{b}_2)$

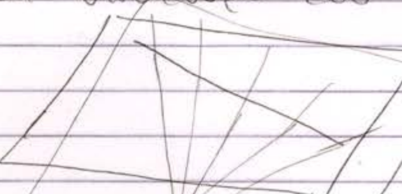
Όπως θα εξηγήσουμε και γεωμετρικά με πολλαπλούς τρόπους, είναι φυσικό ως "σημείο" τομής τους να θέσουμε την ευθεία $l = \text{span}(\bar{b}_1)$ $= \text{span}(\bar{b}_2)$! Σχήμα:



Είναι προφανώς μοναδικό.

Εξηγήσεις: 1) Ως όριο. Θεωρούμε την μία ευθεία σταθερή και την άλλη μεταβαλλόμενη. Αν ξεκινήσουμε με εγκάρσια σχετική θέση και την μετακινήσουμε προς παραλληλία, το σημείο τομής "φεύγει στο άπειρο" και οριακά δίνει την ευθεία l που αναφέραμε.

2) Ως τομή επιπέδων [πιο "ακριβής", δεν χρειάζεται όριο] Κάθε ευθεία στο Αφ.Επ. A^2 αντιστοιχεί (μεταφέρονται τα σημεία της σε "σημεία" (ευθείες)) σε επίπεδο, δηλ. 2d υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ (χωρίς το $\bar{0}$ πάντα.)

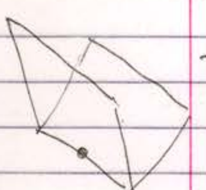


Έστω P_1 το επίπεδο που παράγει η l_1 και P_2 αυτό για την l_1.
Η τομή των 2 επιπέδων, καθώς δεν ταυτίζονται, είναι ευθεία (δεν μπορεί να είναι παράλληλα, καθώς είναι υπόχωροι του ΔΧ $\mathbb{R}^3$!

Αυτό φαίνεται από το Θεώρημα διάστασης για $U, W \subset V$

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

Εδώ $U+W = \mathbb{R}^3$, οπότε $\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim U+W$
$= 2+2-3 = \underline{1}$



Τώρα, πολύ απλά, αν οι ευθείες είναι εγκάρσιες, η ευθεία τομής $P_1 \cap P_2$ περιλαμβάνει σημείο του A^2 και δεν είναι επομένως οριζόντια.
Εάν όμως οι ευθείες είναι παράλληλες, η ευθεία τομής $P_1 \cap P_2$ είναι παράλληλη τους, και καθώς περνά από το O (είναι 1d υπόχωροι) είναι οριζόντια — και έτσι θα βλέπουμε ότι ταυτίζεται με την $l = \text{span}(\bar{b}_1) = \text{span}(\bar{b}_2)$!