Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων

Αναλυτικη Γεωμετρια Ι

Πρώτη Εργασία: Διανυσματικοί Χώροι

[Στο ΔΧ. $\mathbf{R}^n$ θεωρούμε γνωστή την κανονική βάση $\mathcal{E}_n = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, με κάθε $\mathbf{e}_i$ να έχει μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο το 1 στη θέση i.]

1. (α΄) Ποιά είναι η σχέση μεταξύ $\mathrm{span}(u_1, u_2)$ και $\mathrm{span}(u_1 - u_2, u_2)$, όπου u_1, u_2 είναι μη-μηδενικά, μη-συνευθειακά διανύσματα διανυσματικού χώρου V^n.

   (β΄) Συγκρίνετε τα $\mathrm{span}(u_1, u_2, u_3)$ και $\mathrm{span}(u_1 + u_2 + u_3, u_2 + u_3, u_3)$ για γενικά διανύσματα $u_1, u_2, u_3 \in V^n$.

2. (α΄) Δείξτε ότι η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

   είναι $\det A = (a-c)(b-a)(b-c)$.

   (β΄) Βασιζόμενοι στο παραπάνω, βρείτε δέκα διανύσματα στο χώρο $\mathbf{R}^3$ τέτοια ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   (γ΄) Δώστε μία τέτοια τριάδα που να δίνει *όγκο* του παραλληλεπιπέδου που ορίζει ίσο με μονάδα.

3. Δίνονται υποχώροι του $\mathbf{R}^3$:

$$W_1 = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right), \quad W_2 = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

   (α΄) Να βρεθεί η τομή των δύο **υποχώρων**, $W_1 \cap W_2$.

   (β΄) Να βρεθεί η τομή των **επιπέδων** $2\mathbf{e}_1 + W_1$ και $\mathbf{e}_3 + W_2$.

4. Δώστε το σύνολο των λύσεων καθενός από τα παρακάτω γραμμικά συστήματα $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ και ερμηνεύστε το γεωμετρικά (εφόσον είναι μη-κενό.)

$$(a)\ \begin{bmatrix} -7 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(b)\ \begin{bmatrix} -3 & 4 & 11 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ k \\ 7 \end{bmatrix}, \text{ για διάφορες τιμές της σταθεράς } k.$$

   Δώστε επίσης τον πυρήνα και την εικόνα της γραμμικής απεικόνισης που εκφράζει κάθε πίνακας A, υποθέτοντας ότι πήραμε κανονικές βάσεις παντού. Περιγράψτε τί θα συμβεί εάν *διαταράξουμε* ένα από τα στοιχεία του πίνακα A στο δεύτερο σύστημα (δηλ. αν προσθέσουμε μικρό ϵ).

5. (α΄) Δείξτε ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

στον χώρο $\mathbf{R}^4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(β΄) Περιγράψτε το σύνολο $W = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Δίνονται διανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ποιό από αυτά ανήκει στο ανάπτυγμα W;

(γ΄) Βρείτε τέταρτο διάνυσμα ώστε μαζί με τα $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ να έχουμε βάση του $\mathbf{R}^4$ και εκφράστε το διάνυσμα που βρήκατε παραπάνω ότι *δεν ανήκει* στο W ως προς την βάση αυτή.

6. Δίνονται Δ.Χ. V και W με βάσεις $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ και $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Μία γραμμική απεικόνιση στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ στο διάνυσμα $\mathbf{f}_1 + 3\,\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3$ και το διάνυσμα $\mathbf{b}_1 - 2\,\mathbf{b}_2$ στο $-\mathbf{f}_1 + 2\,\mathbf{f}_3$. Εξηγήστε γιατί αρκούν τα δεδομένα αυτά για να οριστεί η γραμμική απεικόνιση και δώστε τον πίνακά της ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{F}$.

   Υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ ο οποίος να απεικονίζεται στο διάνυσμα $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$ του W;

7. Επιλέγουμε βάσεις

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

των Δ.Χ. $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$ αντίστοιχα. Μία γραμμική απεικόνιση $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ έχει πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{F}$.

(α΄) Δώστε τον πίνακα της T ως προς τις συνήθεις βάσεις $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2$.

(β΄) Βρείτε την εικόνα του διανύσματος

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

ΕΚ, 18-3-18