



ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ Δεύτερη Εργασία, 2017-2018

1. Δώστε δύο διαφορετικά παραδείγματα συστημάτων στο επίπεδο με σημείο ισορροπίας στο $(0, 0)$ το οποίο ενώ έχει γειτονιά $N_\epsilon(0)$ τέτοια ώστε $x \in N_\epsilon(0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x, t) = 0$, δεν είναι ευσταθές κατά Lyapunov. Εξηγήστε γιατί τέτοια παραδείγματα είναι κατ' ανάγκην μη-γραμμικά.

2. Το σύστημα του *Duffing*: Το σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\zeta y + x - x^3, \quad \zeta \geq 0 \end{cases}$$

στο επίπεδο είναι η κανονική μορφή της αυτόνομης Δ.Ε.

$$\ddot{x} + \zeta \dot{x} + x^3 - x = 0.$$

Περιγράφει ένα σύστημα με απόσβεση που κινείται σε συμμετρικό δυναμικό με δύο ελάχιστα (γιατί;)

- (α) Θα μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση $\zeta = 0$. Το σύστημα είναι συντηρητικό (Χαμιλτονιανό), της μορφής $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\nabla U(x)$. Επαληθεύστε ότι ισχύει αυτό, δώστε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση $H(x, y)$ και το διάγραμμα ροής (πορτρέτο κίνησης ή φάσεων).
- (β) Τώρα περνάμε στην περίπτωση $\zeta > 0$. Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την (τοπική) τους συμπεριφορά. Δείξτε ότι, κατάλληλα μετατοπισμένη, η H είναι συνάρτηση Lyapunov για κάθε ένα από τα δύο σημεία ισορροπίας που είναι ευσταθή. Δώστε το ακριβές σύνολο όπου ισχύει η συνάρτηση Lyapunov και εξηγήστε γιατί αποτελεί υποσύνολο της περιοχής έλξης κάθε Σ.Ι. Δείξτε ότι εάν *τρέξουμε* τα σύνολα αυτά προς τα πίσω (σε αρνητικό χρόνο) θα πάρουμε τη συνολική περιοχή έλξης. Προσπαθήστε να δώσετε ένα διάγραμμα των περιοχών αυτών για διάφορες τιμές του ζ . Πόσες καμπύλες/τροχιές αποτελούν το διαχωριστικό σύνολο των δύο περιοχών έλξης;
3. Οι εξισώσεις *Lorenz*: Όπως είναι γνωστό το παρακάτω απλό σύστημα σε τρεις διαστάσεις που μελετήθηκε το 1963 από τον E. Lorenz παρουσιάζει "χαοτική συμπεριφορά" για κάποιες τιμές των παραμέτρων του.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy, \quad (\sigma, \rho, \beta > 0) \end{cases}.$$

Προς το παρόν, θα δούμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά του.

- (α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του και την εξάρτησή τους από τις παραμέτρους.
- (β) Δείξτε ότι ο κάθετος άξονας z είναι αναλλοίωτη ευθεία για το σύστημα και περιγράψτε τη δυναμική πάνω του. Επίσης, δείξτε ότι το σύστημα έχει τη συμμετρία $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$.
- (γ) Δείξτε ότι
- για $0 < \rho < 1$, το σημείο ισορροπίας στο 0 είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, κάνοντας χρήση της συνάρτησης Lyapunov

$$V(x, y, z) = \rho x^2 + \sigma(y^2 + z^2).$$

- για $\rho > 1$, το Σ.Ι. 0 έχει μονοδιάστατη ασταθή πολλαπλότητα $W^u(0)$.

4. Το απλό εκκρεμές είναι το σύστημα, σε κανονική μορφή,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \sin x \end{cases} \quad (1)$$

και περιγράφει ένα απλό εκκρεμές, αλλά και τη δυναμική ενός περιστρεφόμενου σώματος γύρω από έναν άξονα.

Για μηδενική απόσβεση $\alpha = 0$ το σύστημα είναι Χαμιλτονιανό. Για θετική απόσβεση $\alpha > 0$, τα Σ.Ι. δεν μετακινούνται, αλλά αλλάζει η ευστάθειά τους.

- (α) Δώστε τυπικά πορτρέτα κίνησης για διάφορες θετικές τιμές του α και περιγράψτε τις ποιοτικές αλλαγές στην δυναμική συμπεριφορά που παρατηρούνται.
- (β) Εφαρμόζεται τώρα μία σταθερή ροπή T στο σύστημα, ώστε το σύστημα είναι

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \sin x + T. \end{cases} \quad (2)$$

Τα σημεία ισορροπίας μετακινούνται.

- Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $0 < T < 1$. Με κατάλληλη αναφορά στο αντίστοιχο Χαμιλτονιανό σύστημα (δηλαδή για $\alpha = 0$, για το οποίο και κάνετε το πορτρέτο κίνησης), δείξτε πως η περιοχή έλξης παραμένει μεν σταθερή, αλλά είμαστε πολύ κοντά σε αστάθεια, καθώς το ευσταθές σημείο πλησιάζει το σάγμα και χρειάζεται μικρή ενέργεια για να βγούμε (και τί γίνεται μετά;)
- Δείξτε ότι για $T > 1$ δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας. Το σύστημα παρ' όλα αυτά παραμένει ευσταθές λόγω των αποσβέσεων. Δώστε το πορτρέτο κίνησης και δείξτε ότι υπάρξει **ευσταθής οριακός κύκλος** στον κύλινδρο (αυστηρή απόδειξη γίνεται με χρήση του θεωρήματος των Poincaré-Bendixson, που αν θέλετε μπορείτε να μελετήσετε στα βιβλία σας).

5. (α) Μελετήστε το σύστημα στο επίπεδο

$$\dot{x} = 2x - x^2, \quad \dot{y} = -y + xy.$$

Βρείτε τα ΣΙ, τον τύπο τους, καθώς και τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες καθενός από αυτά.

Η θεωρία της δομικής ευστάθειας λέει ότι, γενικά, κάθε ασταθής πολλαπλότητα ενός ΣΙ (ή οριακού κύκλου) τέμνει την ευσταθή πολλαπλότητα άλλου ΣΙ ή ΟΚ εγκάρσια.

Δείξτε ότι στο παράδειγμα αυτό η τομή δεν είναι εγκάρσια. Είναι λοιπόν φυσικό να αναμένουμε ότι μικρές διαταραχές καταστρέφουν την μη-εγκάρσια αυτή τομή. Περιγράψτε τρόπους να γίνει αυτό. Υπόδειξη: επιλέξτε σημείο πάνω στην τροχιά που συνδέει τα ΣΙ και με χρήση του Κυτίου Ροής (Flow Box) αηλιάξτε τοπικά το ΔΠ.

(β) Αναγνωρίστε παρόμοιες μη-εγκάρσιες τομές αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων στις Χαμιλτονιανές περιπτώσεις των συστημάτων Duffing και απλού εκκρεμούς.

Συζητήστε κατά πόσο μπορούμε να φέρουμε τα συστήματα αυτά σε "γενική θέση", μένοντας όμως στην κατηγορία των Χαμιλτονιανών συστημάτων (Δείτε σχετικά και την επόμενη Άσκηση.)

6. Χαμιλτονιανοί πίνακες: Ο πίνακας γραμμικοποίησης σε ΣΙ Χαμιλτονιανού συστήματος στο επίπεδο,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

είναι

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \end{bmatrix},$$

και επομένως έχει μηδενικό ίχνος.

(α) Δείξτε ότι η γραμμικοποίηση αυτή δίνει πάντα ή κέντρο ή σάγμα (με ίσες σε απόλυτη τιμές ιδιοτιμές).

(β) Ένας τετραγωνικός πίνακας A διάστασης $m = 2n$ λέγεται Χαμιλτονιανός εάν ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\boxed{A^T J + J A = 0} \quad (*)$$

όπου J είναι ο πίνακας

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι κάθε τέτοιος A έχει μηδενικό ίχνος.

(γ) Δείξτε ότι εάν λ είναι ιδιοτιμή Χαμιλτονιανού πίνακα A , τότε και $-\lambda$ είναι ιδιοτιμή (Υπόδειξη: χρήση της οριζουσας ταυτότητας (*) και θεώρηση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $c_A(\lambda)$.)

(δ) Βρείτε την γενική μορφή Χαμιλτονιανού πίνακα σε δύο διαστάσεις, $m = 2$, και δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του είναι ή $\lambda = \pm i\omega$ ή $\lambda_2 = -\lambda_1$.

Θεωρούμε τώρα μικρές διαταραχές του A εντός του συνόλου των Χαμιλτονιανών πινάκων. Δείξτε ότι εφόσον οι ιδιοτιμές είναι μη-μηδενικές, το διαταραγμένο σύστημα έχει ΣΙ του ίδιου τύπου με το αρχικό (κέντρο ή συμμετρικό σάγμα).

7. Βέλτιστος έλεγχος και Χαμιλτονιανά συστήματα: Συνοπτικά, εάν έχουμε αφινικό σύστημα ελέγχου

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m,$$

με $g(x)$ $n \times m$ πίνακα σταθερού βαθμού m και θεωρήσουμε συναρτησιακό κόστους με Lagrangian $L(x, u)$ (θετικά ορισμένη στο u), σχηματίζουμε την Χαμιλτονιανή

$$H(x, u, p) = (f(x) + g(x)u) \cdot p - L(x, u),$$

όπου $p \in \mathbf{R}^n$ δυϊκές μεταβλητές ("πολλαπλασιαστές Lagrange.")

Η αρχή του μεγίστου (ή ελαχίστου) του Pontryagin οδηγεί στην βέλτιστη Χαμιλτονιανή

$$H^*(x, p) = \sup_u H(x, u, p).$$

Συνήθως, αυτό μας δίνει τον βέλτιστο έλεγχο ως συνάρτηση των x και p , $u^*(x, p)$.

Εάν κάποιες επιπλέον συνθήκες ισχύουν, τότε οι βέλτιστες λύσεις $(x(t), p(t))$ είναι οι τροχιές του Χαμιλτονιανού συστήματος για την συνάρτηση H^* .

(α) Βρείτε τον βέλτιστο έλεγχο u^* και την H^* για γραμμικά συστήματα,

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \text{rank } B = m$$

και για Lagrangian

$$L(x, u) = \frac{1}{2}x^T R x + \frac{1}{2}u^T Q u, \quad R \geq 0, Q > 0$$

και δώστε τις Χαμιλτονιανές του εξισώσεις (που πρέπει να είναι γραμμικές!)

(β) Μελετήστε το σύστημα σε μία διάσταση $\dot{x} = ax + bu$ ($b \neq 0$) και βρείτε τις λύσεις (x, p) για την ασταθή περίπτωση $a > 0$.

8. Εξετάστε το ακόλουθο πρόβλημα: δίνεται γραμμικό σύστημα $\dot{x} = Ax$ στο \mathbf{R}^n , με το 0 ασυμπτωτικά ευσταθές. Η απλούστερη μορφή υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov για το 0 είναι

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Q x,$$

με $Q = Q^T > 0$ (θετικά ορισμένο, συμμετρικό.) Γιατί;

Δείξτε ότι πάντα υπάρχει τέτοιος Q και μάλιστα με $\frac{dV}{dt} = -x^T P x$, με P επίσης θετικά ορισμένο συμμετρικό πίνακα.

Δώστε ένα (μη-διαγώνιο!) παράδειγμα στο \mathbf{R}^3 .

9. Σταθεροποίηση του σαγματικού σημείου του εκκρεμούς: Θα αναλύσουμε κάποιες μεθόδους "εξισορρόπησης" του εκκρεμούς στην κάθετη προς τα πάνω θέση (χωρίς να ισχυριζόμαστε ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην πράξη.)

Οι εξισώσεις είναι, όπως και πριν:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \sin x \end{cases}$$

για α θετικό και μικρό (π.χ. $\alpha = 0.3$).

(α) Θεωρούμε έλεγχο που επεισέρχεται στην εξίσωση για την γωνία, δηλαδή θεωρούμε την νέα πρώτη εξίσωση :

$$\dot{x} = y + u_1(x).$$

Βρείτε έλεγχο $u_1(x) = -kx + c$ ο οποίος να σταθεροποιεί το σαγματικό σημείο $(x, y) = (\pi, 0)$, δηλαδή να έχει το σημείο αυτό ως ολικό ελκυστή (ασυμπτ. ευσταθές ΣΙ). Είναι δυνατό αυτό εάν το σύστημα είναι χωρίς απώλειες (δηλ. $\alpha = 0$);

(β) Επαναλάβετε για έλεγχο στην γωνιακή ταχύτητα, δηλαδή με νέα δεύτερη εξίσωση :

$$\dot{y} = -\alpha y - \sin(x) + u_2(x),$$

πάλι με $u_2 = -kx + c$.

Και στις δύο περιπτώσεις, δώστε κατάλληλα πορτρέτα κίνησης του ελεγχόμενου συστήματος που επιλέξατε.