Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων
Τομεας Γεωμετριας

Γεωμετρικη Θεωρια Ελεγχου

Πρώτη Εργασία, 2017-2018

1. Δίνεται ροή $\phi(p, t)$.

   (α΄) Δείξτε ότι το ω–οριακό σύνολο $\omega(p)$ ενός σημείου είναι *κλειστό* υποσύνολο και *αναλλοίωτο* για την ροή. Δείξτε ότι εάν είναι, επιπλέον, και φραγμένο, τότε είναι και *συνεκτικό*.

   (β΄) Εάν στον χώρο $\mathbf{R}^n$ έχουμε συμπαγές, θετικά αναλλοίωτο υποσύνολο $K \subset \mathbf{R}^n$, δείξτε ότι για κάθε $p \in K$, $\omega(p)$ είναι συμπαγές και συνεκτικό.

   (γ΄) Ένα συμπαγές ω–οριακό σύνολο λέγεται *μεμονωμένο* εάν υπάρχει ανοικτή γειτονιά του η οποία δεν περιλαμβάνει άλλα οριακά σημεία πλην αυτών του οριακού συνολου. Δώστε παραδείγματα μεμονωμένων και μη-μεμονωμένων ω–οριακών συνόλων. Εάν ορίσουμε **οριακό κύκλο** ως ένα μεμονωμένο οριακό σύνολο που είναι κλειστή τροχιά, περιγράψτε τους τύπους των οριακών κύκλων που μπορούμε να έχουμε *στο επίπεδο.*

2. (α΄) Βρείτε την ροή γραμμικού διανυσματικού πεδίου $F(x) = Ax$ στο $\mathbf{R}^n$ και περιγράψτε ποιά σύνολα μπορούμε να έχουμε ως α– και ω–οριακά.

   (β΄) Δίνεται το σύστημα $\dot{x} = x^2$ στην ευθεία $\mathbf{R}$. Βρείτε την ροή του και δείξτε τις ιδιότητες της ροής. Είναι πλήρης;

   (γ΄) Δίνεται το σύστημα $\dot{x} = x(1-x)$ στην ημιευθεία $\mathbf{R}_+ = \{x : x \geq 0\}$. Βρείτε την ροή του και δείξτε τις ιδιότητες της ροής. Είναι πλήρης; Βρείτε το ω–οριακό σύνολο για κάθε $x > 0$.

3. Δώστε τη δομή πολλαπλότητας της σφαίρας $S^n = \{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$, με τους δύο χάρτες που δίνονται από τη στερεογραφική προβολή από τον Βόρειο και το Νότιο πόλο στο επίπεδο $z = 0$. Δώστε τους τύπους για τις προβολές και τις αντίστροφες απεικονίσεις τους, καθώς και τη συνάρτηση αλλαγής χάρτη από το $\mathbf{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ στο $\mathbf{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ και δείξτε ότι είναι λεία.

4. *Διανυσματικά πεδία σε πολλαπλότητες:*

   (α΄) **Σφαίρα:** Θεωρούμε δύο τρόπους για να ορίσουμε ΔΠ στη σφαίρα S^2 (και οι δύο εκμεταλλεύονται το γεγονός ότι έχουμε εμβύθιση στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbf{R}^3$).

   Ο πρώτος είναι με χρήση πολικών συντεταγμένων $(\theta, \phi) \mapsto \mathbf{r}(\theta, \phi)$ (εδώ $\theta \in (0, \pi)$ και $\phi \in (0, 2\pi)$). Δείξτε ότι τα ΔΠ $\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\phi$ δίνουν βάση του εφαπτόμενου χώρου στη σφαίρα σε κάθε σημείο όπου ορίζονται οι σφαιρικές συντεγταγμένες. Τα ΔΠ αυτά είναι τα ίδια με τα ΔΠ $\frac{\partial}{\partial\theta}$ και $\frac{\partial}{\partial\phi}$ που μελετήσαμε στη θεωρία ή όχι; Ποιές είναι οι λύσεις των ΔΠ αυτών;

Ένα ΔΠ στη σφαίρα δίνεται λοιπόν ως $X = a(\theta,\phi)\mathbf{r}_\theta + b(\theta,\phi)\mathbf{r}_\phi$. Πώς πρέπει να περιορίσουμε τις συναρτήσεις a, b ώστε να έχουμε καλά ορισμένο, λείο ΔΠ στη σφαίρα;

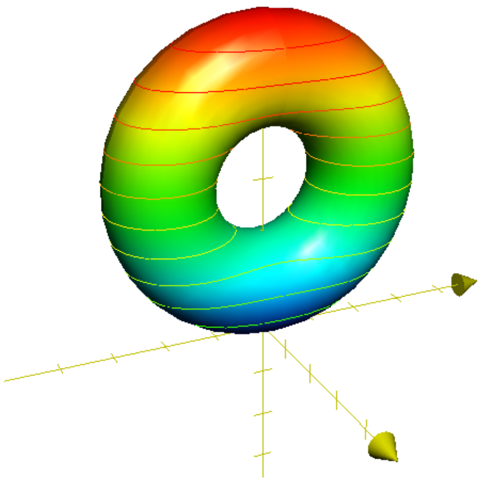
Ο δεύτερος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι το ΔΠ $\mathbf{F}_h = (-y, x, 0)$ στο $\mathbf{R}^3$ αφήνει αναλλοίωτη τη σφαίρα S^2 (αλλά και κάθε σφαίρα με κέντρο το 0), καθώς $\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}_h = 0$. Δείξτε ότι οι λύσεις του πεδίου αυτού συμπίπτουν με τις λύσεις του $\mathbf{r}_\phi$. Εάν ορίσουμε ένα δεύτερο ΔΠ από το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_h \times \mathbf{r}$, τότε και το $\mathbf{F}_v$ εφάπτεται της σφαίρας. Εξηγήστε προσεκτικά πώς θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα γενικό ΔΠ σε κάποιο υποσύνολο της σφαίρας από τα $\mathbf{F}_h, \mathbf{F}_v$. Συγκρίνετε τις δύο μεθόδους.

(β΄) **Τόρος:** Εδώ θεωρούμε τον τόρο ως χώρο πηλίκο $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Εξηγήστε γιατί κάθε ΔΠ στο επίπεδο, το οποίο είναι 2π-περιοδικό στο x και y δίνει λείο ΔΠ στον τόρο.

Με χρήση λογισμικού, περιγράψτε τη δυναμική του ΔΠ

$$\mathbf{F} = \cos(x)\sin(2y)\,\mathbf{i} + \sin(x+2y)\,\mathbf{j}.$$

Τέλος, μπορείτε να βρείτε αναλυτική μορφή για ΔΠ στον τόρο, το οποίο αντιστοιχεί στην κλίση του αθμωτού πεδίου που δίνεται από τη συνάρτηση ύψους, όταν ο τόρος θεωρηθεί τοπποθετημένος κατακόρυφα στο χώρο $\mathbf{R}^3$; (όπως στο Σχήμα)



5. (α΄) Εάν $M = M_n(\mathbf{R})$ είναι ο ΔΧ όλων των $n \times n$ πινάκων με πραγματικά στοιχεία και $\det : M \to \mathbf{R}$ είναι η απεικόνιση της ορίζουσας, ποιό από τα δύο υποσύνολα του M: το $N = \{\det A = 0\}$ και το $Gl(n,\mathbf{R}) = \{\det A \neq 0\}$ είναι πολλαπλότητα; (προσοχή στη διάσταση n). Περιγράψτε τον εφαπτόμενο χώρο του $Gl(n,\mathbf{R})$ στο σημείο I_n (μοναδιαίος πίνακας διάστασης n).

(β΄) Θεωρούμε το υποσύνολό του $GL(n,\mathbf{R})$ των *ορθογώνιων* πινάκων, $O(n,\mathbf{R})$, δηλαδή πινάκων με $A^TA = I_n$. Δείξτε ότι είναι *συμπαγής* υποπολλαπλότητα της $GL(n,\mathbf{R})$. Είναι συνεκτική ή όχι;

(γ΄) Δείξτε ότι το υποσύνολο $Sl(n,\mathbf{R}) = \{\det A = 1\}$ δίνει υποπολλαπλότητα *(υπόδειξη: δείξτε ότι έχουμε κανονική τιμή της συνάρτησης* $\det$.*)*

6. Ο προβολικός χώρος $\mathbf{R}P^n$ ορίζεται ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ για την σχέση ισοδυναμίας

$$x \sim x' \Leftrightarrow \exists k \neq 0 : x' = kx.$$

(Είναι δηλαδή το σύνολο τα στοιχεία του οποίου είναι ¨ευθειές¨ στο $\mathbf{R}^{n+1}$ που περνούν από το 0).

Δώστε δομή πολλαπλότητας (χάρτες και αλλαγές χαρτών) στον προβολικό χώρο $\mathbf{R}P^n$. Πώς μπορούμε να ορίσουμε διανυσματικό πεδίο στον χώρο αυτό; Δώστε ένα παράδειγμα ΔΠ στον $\mathbf{R}P^2$.

Υπάρχει παντού μη-μηδενικό ΔΠ στο $\mathbf{R}P^1$; στο $\mathbf{R}P^2$; (χρειάζονται κάποιες γνώσεις τοπολογίας για το θέμα αυτό —δώστε μιά διαισθητική απάντηση).

7. Θα θεωρήσουμε γνωστό το θεώρημα ($M_n(\mathbf{C})$ είναι ο διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων με *μιγαδικά* στοιχεία):

Θεώρημα 1 (Μορφή Jordan) *Κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbf{C})$ είναι όμοιος με άνω τριγωνικό πίνακα J (τη μορφή Jordan του A), $J = \operatorname{diag} J_i$, όπου J_i είναι Jordan block:*

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

με λ ιδιοτιμή του A. Μπορεί να έχουμε παραπάνω από ένα Jordan block για μία ιδιοτιμή.

Το άθροισμα των διαστάσεων των Jordan block για μία ιδιοτιμή είναι η **αλγεβρική** της **πολλαπλότητα**. Ο αριθμός των Jordan block για την ιδιοτιμή είναι η **γεωμετρική** της **πολλαπλότητα**.

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος, τα παρακάτω αποτελέσματα αποδεικνύονται εύκολα (δώστε τις αποδείξεις):

(α΄) **Θεώρημα Cayley-Hamilton:** Κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbf{C})$ ικανοποιεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, δηλαδή αν $c_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, τότε $c_A(A) = 0$.

(β΄) **Ελάχιστο πολυώνυμο:** Δείξτε ότι εάν $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ είναι οι διακριτές ιδιοτιμές του A και μ_i είναι η διάσταση του μεγαλύτερου Jordan block για την ιδιοτιμή λ_i, τότε ορίζεται (το **ελάχιστο**) **πολυώνυμο** $m_A(\lambda) = \Pi_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{\mu_i}$ και ο πίνακας A ικανοποιεί και το m_A, δηλαδή $m_A(A) = 0$. Δείξτε ότι το m διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο c_A και ότι τα δύο πολυώνυμα συμπίπτουν εάν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίδιες. Βρείτε ένα–δύο παραδείγματα πινάκων όπου τα δύο πολυώνυμα δεν συμπίπτουν.

(γ΄) Δείξτε ότι εάν $p(A)$ είναι πολυώνυμο στον πίνακα A βαθμού N, τότε $p(A) = r(A)$, όπου ο βαθμός του r είναι το πολύ ίσος με $n-1$. Επομένως, και κάθε δύναμη του A, A^N, για $N \geq n$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των δυνάμεων $A^0 = I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$.

Εκφάστε τον πίνακα $A^{11} - 2A^7$ ως άθροισμα $\alpha I + \beta A$ για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(δ΄) Δείξτε ότι ισχύει ο τύπος:

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}.$$

8. (α΄) Δείξτε ότι εάν δύο τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M_n$ αντιμετατίθενται, $AB = BA$, τότε $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$, για κάθε $t \in \mathbf{R}$.

   (β΄) Δείξτε ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας A είναι όμοιος με το άθροισμα πινάκων S και N, όπου S είναι διαγώνιος και N είναι μηδενοδύναμος πίνακας (Υπόδειξη: προκύπτει από τη μορφή Jordan). Επομένως, δείξτε ότι η εκθετική συνάρτηση του A είναι όμοια με την $e^{St}e^{Nt}$ και δώστε τη γενική μορφή των δύο αυτών εκθετικών συναρτήσεων και επομένως της e^{At}.

9. Δώστε τους τρεις πρώτους όρους της σειράς Taylor για τις συνθέσεις γραμμικών ροών:

$$e^{tA}e^{tB} \text{ και } e^{-tA}e^{-tB}e^{tA}e^{tB}.$$

Στην πρώτη περίπτωση, εκφράστε την απάντησή σας μέσω των όρων της σειράς Taylor της $e^{t(A+B)}$ και καταλλήλων αγκυλών Lie (στην άλγεβρα Lie πινάκων). Τί εικάζετε ότι θα έχουμε συνολικά; Δείξτε ότι εάν $AB = BA$, τότε $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$ για κάθε t.

10. Υπολογίστε την αγκύλη Lie των ΔΠ στο χώρο:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x^3 \\ -xy^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ z^2 \\ x \end{bmatrix}.$$

Δείξτε επομένως ότι το σύστημα ελέγχου $\dot{x} = u_i\mathbf{F} + u_2\mathbf{G}$ (με $u_1, u_2 \in \mathbf{R}$) ικανοποιεί τη συνθήκη μη-γραμμικής ελεγξιμότητας σχεδόν παντού στο χώρο (δηλαδή η άλγεβρα Lie ελέγχου, αυτή που παράγεται από τα ΔΠ ελέγχου $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$, δίνει κατανομή ελέγχου βαθμού ίσου με τρία σχεδόν παντού).

11. (α΄) Δίνονται Δ.Π. στο επίπεδο: $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = f(x)\frac{\partial}{\partial y}$, όπου η συνάρτηση f είναι C^∞ και είναι μηδενική για $x \leq 0$ και $f(x) > 0$ και γνήσια αύξουσα για $x > 0$. Δώστε μιά τέτοια συνάρτηση. Περιγράψτε το *προσβάσιμο σύνολο* $\mathcal{R}(T)$ από το αρχικό σημείο $(-1, 0)$ εάν έχουμε διαθέσιμα μόνο τα Δ.Π. X και Y σε θετικό χρόνο.

    (β΄) Υπολογίστε την άλγεβρα Lie ελεγξιμότητας του συστήματος. Εξηγήστε πώς συμβιβάζονται όλα τα παραπάνω με το θεώρημα των Sussman-Stefan;

12. Επαληθεύστε την ταυτότητα $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$ στην περίπτωση που τα ΔΠ είναι γραμμικά: $X = Ax$ και $Y = Bx$ (το δεξί μέλος δίνει την παράγωγο Lie του ΔΠ Y ως προς την ροή του ΔΠ X).

13. Θεωρούμε το σύστημα ελέγχου στο επίπεδο, όπου είναι διαθέσιμα δύο *σταθερά* ΔΠ $X_1 = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ και $X_2 = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$ και επιτρέπεται να προχωρούμε με το ένα ή το άλλο ΔΠ, ή με τα αντίστροφά τους, δηλ. με τις ροές ϕ_{X_1} και ϕ_{X_2}.

(α΄) Δείξτε ότι το *προσβάσιμο σύνολο* $\mathcal{R}(0,T)$ των σημείων που μπορούμε να φτάσουμε σε χρόνο $\leq T$ από το αρχικό σημείο 0 είναι το $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : ||\mathbf{x}||_1 \leq c\}$, όπου $||\mathbf{x}||_1 = |x| + |y|$ είναι η 1-νόρμα. Βρείτε τη σταθερά c.

(β΄) Εάν τώρα περιορίσουμε τον χώρο κατάστασης στο κλειστό τετράγωνο με κέντρο το 0 και πλάτος 2 (δεν επιτρέπεται να βγούμε από αυτόν), δείξτε ότι κάθε σημείο του εσωτερικού του είναι προσβάσιμο, αλλά για κάποια σημεία στο σύνορο, δεν μπορούμε να φτάσουμε με πεπερασμένο αριθμό αλλαγών ροής. Ποιά είναι τα σημεία αυτά;

14. *Κυκλικότητα και Ελεγξιμότητα:* Έστω $v \in V^n$, $v \neq 0$ διάνυσμα και $T : V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε την ακολουθία των διανυσμάτων

$$\{v, Tv, T^2v, \ldots\}.$$

(α΄) Έστω ότι το σύνολο αυτό περιλαμβάνει ακριβώς k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα —προφανώς ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων της ακολουθίας είναι n, οπότε $0 < k \leq n$. Δείξτε ότι τότε τα *πρώτα* k διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(β΄) Ορίζουμε τον υποχώρο $\mathcal{I}(v) = \mathrm{span}(v, Tv, \ldots, A^{k-1}v)$. Δείξτε ότι είναι **αναλλοίωτος** για τη γραμμική αεικόνιση T. Εάν $\mathcal{I}(v) \neq V$ (δηλ. $k < n$), επιλέγουμε διάνυσμα $v' \in V - \mathcal{I}(v)$ και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, για να βρούμε αναλλοίωτο χώρο $\mathcal{I}(v')$ κοκ. Δείξτε ότι έτσι θα έχουμε βάση του V και δώστε τον πίνακα της T ως προς τη βάση αυτή.

(γ΄) Ένα διάνυσμα b είναι **κυκλικό** εάν $\dim \mathcal{I}(b) = n$, συνθήκη που είναι ουσιαστικά η συνθήκη γραμμικής ελεγξιμότητας. Δείξτε ότι υπάρχει κυκλικό διάνυσμα για τη γραμμική απεικόνιση T εάν και μόνον εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της T συμπίπτει με το ελάχιστο πολυώνυμό της, $c_T(\lambda) = \mu_T(\lambda)$.

(δ΄) Δείξτε ότι η γραμμική ελεγξιμότητα είναι γενική ιδιότητα, ισχύει δηλαδή για ανοικτό, πυκνό υποσύνολο των ζευγών $n \times n$ πινάκων και διανυσμάτων στο $\mathbf{R}^n$.

15. Θεωρούμε δύο ΔΠ $X, Y \in \mathcal{X}^\infty(M)$ στην πολλαπότητα M^n, με $n \geq 3$.

(α΄) Δώστε τον τύπο για την αγκύλη Lie των X, Y σε τοπικές συντεταγμένες $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

(β΄) Θεωρούμε το *ιδιάζον σύνολο*

$$\Sigma = \{p \in M : \exists a, b : [X,Y](p) = aX(p) + bY(p)\}$$

όπου η αγκύλη δίνει διάνυσμα στον υποχώρο $\mathrm{span}(X(p), Y(p)) \subset T_pM$. Για γενικά ΔΠ, δείξτε ότι το Σ είναι υποπολλαπλότητα της M και βρείτε τη διάστασή της.

(γ΄) Υπολογίστε την αγκύλη και το ιδιάζον σύνολο Σ για τα ΔΠ

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = (x^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial x} + 0\frac{\partial}{\partial y} + 2xz\frac{\partial}{\partial z}.$$

ΕΚ, 17-12-17