Κεφάλαιο 6

Ασκήσεις

1. (α΄) Δώστε δράση του ΔΧ $\mathbf{R}^2$ στο αφινικό επίπεδο $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = 2\}$. Επίσης, δώστε μία αφινική βάση τριών σημείων (a_0, a_1, a_2) και βρείτε τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες του σημείου $(2,-2,3) \in \mathcal{P}$ ως προς τη βάση αυτή.

   (β΄) Στον αφινικό χώρο $\mathbf{A}^3$ με δεδομένη την διατεταγμένη αφινική βάση $\mathcal{A} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, γράφουμε τυχαίο σημείο ως

   $$a = a_0 + x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3, \text{ όπου } \mathbf{b}_i = a_i - a_0,\ i = 1,2,3,$$

   δηλαδή x_1, x_2, x_3 είναι οι αφινικές του συντεταγμένες. Γράφουμε $\mathbf{x}$ το διάνυσμα με τις συντεταγμένες αυτές.

   Βρείτε τον πίνακα C και το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}$ ως προς τη βάση $\mathcal{A}$ για την αλλαγή βάσης $\mathbf{z} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ που παίρνουμε από την *μετάθεση* των σημείων βάσης (a_2, a_3, a_0, a_1).

2. Δίνονται τα αφινικά επίπεδα

   $$\mathcal{P}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 3x + 2y + z = 6\} \quad \text{και}$$

   $$\mathcal{P}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : -x - 2y + 3z = 2\}.$$

   (α΄) Δώστε αφινικές βάσεις (a_0, a_1, a_2) και (a'_0, a'_1, a'_2) των $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ αντίστοιχα με a_i (αντίστ. a'_i) τα σημεία τομής των επιπέδων με τους τρεις άξονες x, y, z. Επομένως, δώστε και βάσεις της μορφής $(a_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ και $(a'_0, \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2)$ αντίστοιχα.

   (β΄) Βρείτε την αφινική απεικόνιση $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, ως προς τις παραπάνω βάσεις, που στέλνει το a_0 στο $-a'_0 + 2a'_2$, το a_1 στο $(a'_0 + a'_1 + a'_2)/3$ και το a_2 στο $(a'_1 + a'_2)/2$. Είναι ομαλή (αντιστρέψιμη); Βρείτε την αντίστροφη εικόνα του σημείου $3a'_1 - 2a'_2$.

3. (α΄) Δίνονται σημεία $A_0, A_1, \ldots, A_m$ του $\mathbf{R}^n$. Πότε λέμε ότι είναι *αφινικά ανεξάρτητα*; Τί εννοούμε με το αφινικό τους ανάπτυγμα και τί

είναι αυτό όταν τα $m+1$ σημεία είναι αφινικά ανεξάρτητα; Μπορεί να έχουμε $n+1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία στο $\mathbf{R}^n$;

(β΄) Δίνονται αφινικά ανεξάρτητα σημεία A_0, A_1, A_2 του $\mathbf{R}^3$,

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}).$$

Δείξτε ότι το σημείο $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ανήκει στο αφινικό τους ανάπτυγμα εάν και μόνον εάν

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \end{bmatrix} = 0$$

(γ΄) Δώστε την *αναλυτική μορφή* $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ του αφινικού επιπέδου $X \subset \mathbf{R}^3$ που ορίζουν τα σημεία $(2, 1, -2), (3, -2, 1), (1, 1, 3)$. Τέλος, βρείτε το *εμβαδόν* του παραλληλογράμμου το οποίο ορίζουν τα τρία σημεία.

4. (α΄) Τί σημαίνει τέσσερα σημεία (a, b, c, d) του αφινικού χώρου $\mathcal{A}^3$ να είναι *αφινικά ανεξάρτητα;* Εξηγήστε γιατί ορίζουν τετράεδρο. Δώστε την *αλλαγή βάσης* που στέλνει τις κορυφές του τετράεδρου αυτού στα *βαρύκεντρα* των τριγώνων που βρίσκονται ακριβώς απέναντι από κάθε κορυφή.

(β΄) Δώστε την *αφινική απεικόνιση* η οποία απεικόνίζει το επίπεδο $x + y + z = 2$ στο επίπεδο $2x - y + 3z = 3$ και στέλνει τα σημεία τομής των επιπέδων με τους άξονες του ενός στα αντίστοιχα σημεία του δευτέρου.

5. (α΄) Δείξτε ότι τα τρία σημεία $B_0 = (2, 3, 0), B_1 = (3, 1, 2), B_2 = (2, 0, 2)$ του χώρου $\mathbf{R}^3$ είναι αφινικά ανεξάρτητα και επομένως έχουν αφινικό ανάπτυγμα επίπεδο, ας πούμε $\mathcal{P}_2$.

(β΄) Επαληθεύστε ότι τα σημεία

$$P = (-1, 0,),\ Q = (0, 1, 0),\ R = (0, 0, 2/3)$$

ανήκουν στο $\mathcal{P}_2$ και δώστε τις *αφινικές και τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες* τους ως προς την διατεταγμένη αφινική του βάση $\mathcal{B} = (B_0, B_1, B_2)$.

(γ΄) Δίνεται τώρα δεύτερο αφινικό επίπεδο $\mathcal{P}_1$ με την αναλυτική μορφή $2x - y + z = 2$. Βρείτε αφινική του βάση $\mathcal{A} = (A_0, A_1, A_2)$ και την μορφή της βάσης: $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})$.

(δ΄) Δώστε τώρα, βασιζόμενοι στα παραπάνω, την αφινική απεικόνιση $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ η οποία στέλνει τα A_0, A_1, A_2 στα σημεία P, Q και R αντίστοιχα (θέλουμε πίνακα και διάνυσμα μετατόπισης). Εάν G είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $A_0A_1A_2$, βρείτε την εικόνα του $f(G)$.

6. Θεωρούμε τετραγωνική συνάρτηση στο αφινικό επίπεδο $\mathbf{A}^2$:

$$f(x,y) = ax^2 + 12xy + 9y^2 + 6x - 10y.$$

   (α΄) Ταξινομήστε τις καμπύλες $f(x,y) = 0$ που προκύπτουν για διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbf{R}$ και δώστε τις αφινικές κανονικές τους μορφές.

   (β΄) Για την τιμή $a = 5$, δώστε την αντίστοιχη ομογενή συνάρτηση $F(X,Y,Z)$ από την οποία, για $Z = 1$ προκύπτει η $f(x,y)$ και αναγνωρίστε την ως τετραγωνική μορφή στο χώρο (πρόσημα των ιδιοτιμών χρειάζονται μόνο).

7. (α΄) Βρείτε την αφινική ισοδυναμία (δηλαδή την αφινική αλλαγή βάσης) που μετατρέπει την τετραγωνική καμπύλη στον $\mathcal{A}^2$

$$f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 6x + 5y - 1 = 0$$

   στην κανονική της μορφή.

   (β΄) Δώστε την αντίστοιχη ομογενή συνάρτηση $F(X,Y,Z)$ από την οποία, για $Z = 1$ προκύπτει η $f(x,y)$ και αναγνωρίστε την ως τετραγωνική επιφάνεια στο **χώρο** *(πρόσημα των ιδιοτιμών χρειάζονται μόνο).*

8. *Τετραγωνική συνάρτηση* δύο μεταβλητών θεωρούμε συνάρτηση

$$q(x,y) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} + f, \quad \text{όπου} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

   (α΄) Για τις παρακάτω τετραγωνικές εξισώσεις $q_i(x,y) = 0$, δώστε τον πίνακα A και επαυξημένο πίνακα $\tilde{A}$ και επομένως (υπολογίζοντας κατάλληλες ορίζουσες των A, $\tilde{A}$ κ.ο.κ.), αναγνωρίστε τις τετραγωνικές καμπύλες στον *αφινικό χώρο* που προκύπτουν. Δώστε την *αφινική κανονική τους μορφή.*

$$q_1(x,y) = 2x^2 + 5xy - 3x - 4y + 2 = 0$$
$$q_2(x,y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x - 3y + 2 = 0$$
$$q_3(x,y) = x^2 - 6xy + 9y^2 - 2 = 0$$

   (β΄) Για τις q_1 και q_2, βρείτε κατάλληλο διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ και συντελεστή $\tilde{f}$ τέτοια ώστε η τετραγωνική εξίσωση να έχει τη μορφή

$$q_i(x,y) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \tilde{f} = 0.$$

   Περιγράψτε την καμπύλη $q_2 = 0$ ως καμπύλη στο Ευκλείδειο επίπεδο: βρείτε το κέντρο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A και κάνετε το σχήμα της.

9. Θεωρούμε τρία διακριτά "σημεία" του προβολικού χώρου $\mathbf{R}P^1$, δηλαδή τρεις διακριτές ευθείες ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 στο $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ (το επίπεδο μείον το 0). Δείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε ομογενείς συνταταγμένες $[X_1 : X_2]$, $[Y_1 : Y_2]$ και $[Z_1 : Z_2]$ για τις ℓ_i, $i = 1, 2, 3$ έτσι ώστε να έχουμε

$$Z_1 = X_1 + Y_1, \; Z_2 = X_2 + Y_2.$$

Βρείτε τέτοιες συντεταγμένες για τις ευθείες $\ell_1 : -x + 2y = 0$, $\ell_2 : 2x + y = 0$ και $\ell_3 : 5x - 3y = 0$.

10. (α') "*Δύο διακριτές ευθείες στον προβολικό χώρο* $\mathbf{R}P^2$ *τέμνονται πάντοτε σε ένα και μοναδικό σημείο του* $\mathbf{R}P^2$" — εξηγήστε. Ισχύει αυτό στην αφινική γεωμετρία;

   (β') Δώστε τον ορισμό του $\mathbf{R}P^2$ ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας στον τρυπημένο χώρο $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ για σχέση ισοδυναμίας $\sim$ και δώστε τον ορισμό της σχέσης αυτής. Τί εννοούμε με *ομογενείς συντεταγμένες* $[x : y : z]$ σημείου του προβολικού χώρου;

   (γ') Θεωρούμε το αφινικό επίπεδο $\mathcal{A}^2$ ως το επίπεδο $\{z = 1\} \subset \mathbf{R}^3 - \{0\}$. Δώστε το σημείο τομής $P \in \mathbf{R}P^2$ των ευθειών του $\mathcal{A}^2$: $x+4y = 3$ και $2x - 5y = -7$, καθώς και το σημείο τομής $Q \in \mathbf{R}P^2$ των ευθειών του $\mathcal{A}^2$: $2x - 3y = 6$ και $-4x + 6y = 13$ (θέλουμε τις ομογενείς συντεταγμένες των P και Q).

11. (α') Θεωρούμε τον προβολικό χώρο $\mathbf{R}P^2$ ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του συνόλου $\mathbf{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ για τη σχέση ισοδυναμίας "*δύο σημεία είναι ισοδύναμα αν ανήκουν στην ίδια ευθεία*". Θεωρούμε αφινικό επίπεδο $\mathcal{A}^2 = \{\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta\} \subset \mathbf{R}^3$ που δεν περνά από το μηδέν. Περιγράψτε το σύνολο των στοιχείων του $\mathbf{R}P^2$ τα οποία δεν έχουν αντιπρόσωπο στο επίπεδο, δηλαδή δεν υπάρχει σημείο του $\mathcal{A}^2$ που να δίνει ομογενείς συντεταγμένες για την ευθεία/σημείο του $\mathbf{R}P^2$. Τί ερμηνεία έχουν οι ευθείες στο σύνολο αυτό;

   (β') Βρείτε τα σημεία του προβολικού χώρου $\mathbf{R}P^1$ που αντιστοιχούν στις τομές των παρακάτω ζευγών ευθειών στο $\mathbf{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$:

$$2x - 5y = 3 \quad \text{και} \quad -3x + 2y = 1$$

   και

$$2x - y = -2 \quad \text{και} \quad -6x + 3y = 7.$$

12. Δείξτε ότι η συνάρτηση $q : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

$$q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = q((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 2x_3y_3$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >_q = q(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ στο ΔΧ $\mathbf{R}^3$. Δώστε τη συνάρτηση μέτρου που ορίζει και περιγράψτε το σύνολο $||\mathbf{u}||_q = 2$ διανυσμάτων σταθερού μέτρου. Τέλος, δώστε την εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται ως το σύνολο των διανυσμάτων που είναι κάθετα, ως προς αυτό το εσωτ. γιν., στο $(1,1,1)$.

13. (α΄) Δίνεται η τετραγωνική μορφή στο χώρο

$$q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy + 2yz.$$

Δείξτε ότι είναι θετικά ορισμένη και δώστε τη συνάρτηση μέτρου που ορίζει στο $\mathbf{R}^3$. Ισχυριζόμαστε ότι η μορφή αυτή προκύπτει από εσωτερικό γινόμενο $< .,. >$ στο $\mathbf{R}^3$. Δώστε ταυτότητα η οποία να εκφράζει το εσωτερικό γινόμενο μέσω της τετραγωνικής μορφής και επομένως (ή με άλλον τρόπο) δώστε το εσωτερικό γινόμενο $< .,. >$

(β΄) Διατυπώστε την ανισότητα των Cauchy-Schwarz και δώστε μία απόδειξή της.

14. (α΄) Δείξτε ότι σε Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο E^n ισχύουν οι ανισώσεις:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq ||\mathbf{v}||\, ||\mathbf{v}||, \quad |\, ||\mathbf{v}|| - ||\mathbf{u}||\, | \leq ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||.$$

(β΄) Για ποιές τιμές της σταθεράς C ορίζεται εσωτερικό γινόμενο $< \mathbf{u}, \mathbf{u} >_Q = \mathbf{u} \cdot Q\mathbf{v}$ στο $\mathbf{R}^3$ από τον πίνακα

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & C & -1 \\ C & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Δώστε την εξίσωση του συνόλου των διανυσμάτων που είναι κάθετα στο $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ ως προς το εσωτερικό αυτό γινόμενο.