Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικη Τοπολογια 2016-17

Πρώτη Εργασία

1. Διαβάστε τις σημειώσεις πάνω στη Διανυσματική Ανάλυση και απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις που βρίσκονται μέσα στο κείμενο (υπάρχουν οκτώ τέτοια ερωτήματα, με πλάγια γραμματοσειρά, σε παρενθέσεις).

2. Σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ εάν ένας μορφισμός $f \in \mathrm{Mor}\,(A, B)$ έχει αριστερό αντίστροφο δηλαδή $g \in \mathrm{Mor}\,(B, A)$ με $g \circ f = \mathrm{id}_A$ και δεξί αντίστροφο $h \in \mathrm{Mor}\,(B, A)$ (με $f \circ h = \mathrm{id}_B$), τότε $g = h$.

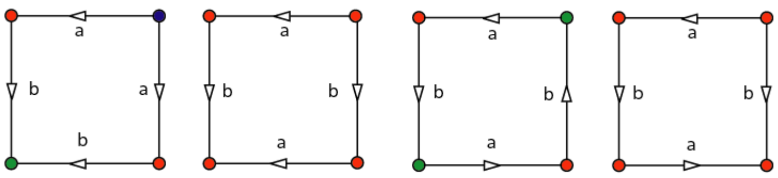
   Δείξτε επίσης ότι ο ταυτοτικός id_A σε κάθε $\mathrm{Mor}\,(A, A)$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι μοναδικός.

3. Δείξτε ότι εάν M είναι *μονοειδές* (ορίζεται δηλαδή προσεταιριστική πράξη και υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο), τότε μπορούμε να ορίσουμε κατηγορία $\mathcal{C}$ με Ob σύνολο με ένα στοιχείο, ας το πούμε $*$, μορφισμούς $\mathrm{Mor}\,(*, *) = M$ και ¨σύνθεση¨ βελών το γινόμενο στο M. Έτσι βλέπουμε πάλι ότι οι μορφισμοί μίας κατηγορίας δεν είνα απαραίτητα συναρτήσεις.

4. Υπολογίστε τη χαρακτηριστική του Euler της σφαίρας, του τόρου, του προβολικού επιπέδου και της φιάλης του Klein. Από την θεώρημα ταξινόμησης συμπαγών επιφανειών, η επιφάνεια Σ_g παράγεται από την ταύτιση των πλευρών κανονικού πολυγώνου με $2g$ πλευρές με τον εξής τρόπο (παίρνουμε με τη σειρά τις πλευρές):

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, \text{ π.χ. για τον τόρο}: \quad aba^{-1}b^{-1}.$$

   (Συμβουλευτείτε το πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου του Massey για λεπτομέρειες.) Δείξτε ότι επομένως $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$.



sphere S | torus T | projective plane P | Klein bottle K

5. (α΄) Δείξτε ότι αν $r : X \to A$ είναι σύμπτυξη (retraction) και ο X είναι Hausdorff, τότε το υποσύνολο A είναι κλειστό.

(β΄) Δείξτε ότι εάν έχουμε σύμπτυξη $r : X \to A$ και η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(A) \neq \{1\}$, τότε ο χώρος X δεν είναι συσταλτός.

6. Δείξτε ότι εάν για τοπολογικό χώρο X η συνεχής απεικόνιση $f : X \to S^n$ ($n \geq 1$) *δεν είναι επί*, τότε η f είναι μηδεν-ομοτοπική, δηλαδή ομοτοπική με τη σταθερή συνάρτηση.

7. Δείξτε ότι:

   (α΄) Το επίπεδο μείον πεπερασμένο αριθμό διακριτών σημείων έχει ως παραμορφωτικό σύμπτυγμα ένα ¨μπουκέτο¨ κύκλων, δηλαδή κύκλους με ένα κοινό σημείο.

   (β΄) Ο χώρος $\mathbf{R}^3$ μείον η ευθεία $\{(0,0,z) : z \in \mathbf{R}\}$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του κύκλου S^1. Γενικότερα, για $m < n$, ο χώρος $\mathbf{R}^n - \mathbf{R}^m$ έχει τον τύπο ομοτοπίας σφαίρας S^{n-m-1}.

8. Έστω $F_2 =< a, b >$ η ελεύθερη ομάδα σε δύο στοιχεία και $F_3 =< u, v, w >$ η ελεύθερη ομάδα σε τρία στοιχεία. Φαίνεται μεγαλύτερη. Δείξτε όμως ότι η απεικόνιση $h : F_3 \to F_2$ που στέλνει τους γεννήτορες $u \mapsto ab$, $v \mapsto a^2b^2$ και $w \mapsto a^3b^3$ και επεκτείνεται στις λέξεις με προφανή τρόπο είναι μονομορφισμός. Τί θα λέγατε για την απεικόνιση των u, v, w στα a^2 , b^2 και ab αντίστοιχα;

   Από την άλλη μεριά, και η F_2 εγκλείεται στην F_3 με προφανή τρόπο. Έχουμε δηλαδή μονομορφισμούς $F_3 \to F_2$ και $F_2 \to F_3$. Δείξτε ότι, παρ' όλα αυτά, οι δύο ομάδες δεν είναι ισόμορφες, καθώς έχουν μη-ισόμορφες ¨αβελιανοποιήσεις¨. Έχουμε μήπως αντίφαση με τον ορισμό ισομορφισμού σε κατηγορία; (εδώ την **Group**)

9. Δώστε παράδειγμα συνεχούς απεικόνισης $f : X \to Y$ που είναι επί αλλά όχι 1:1 και τέτοια ώστε ο ομομορφισμός $\pi(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ να είναι 1:1 αλλά όχι επί.

   Βρείτε και f, X, Y με την f 1:1 αλλά όχι επί που να δίνει $\pi(f)$ επί αλλά όχι 1:1.

10. Είδαμε ότι παράσταση της θεμελιώδους ομάδας του προβολικού επιπέδου είναι

$$\pi_1(\mathbf{R}P^2) \simeq < a, b \mid abab > .$$

   Δείξτε ότι πρόκειται για την αβελιανή ομάδα $\mathbb{Z}_2$.

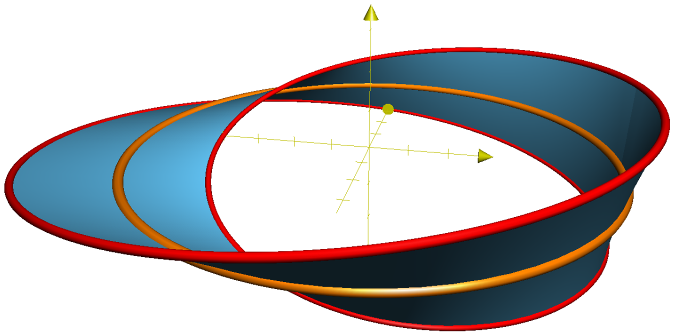
   Δώστε γεννήτορα α της ομάδας, δηλαδή βρόχο στο τετράγωνο που ορίζει τον προβολικό χώρο με τις γνωστές ταυτίσεις, τέτοιον ώστε η σύνθεση με τον εαυτό του δίνει βρόχο ομοτοπικό με τον τετριμμένο. Δείξτε σε σχήμα τα βήματα της ομοτοπίας.

11. (α΄) Δείξτε ότι ο τόρος T^2 μείον ένα σημείο του έχει τον τύπο ομοτοπίας μπουκέτου δύο κύκλων $S^1 \vee S^1$.

   (β΄) Δείξτε ότι ο κύκλος S^1 είναι σύμπτυξη του $S^1 \vee S^1$, αλλά δεν υπάρχει παραμορφωτική σύμπτυξη.

12. Η ταινία του Möbius $\mathcal{M}$ προκύπτει από την ταύτιση δύο απέναντι ακμών του τετραγώνου, με αντίθετη φορά. Γεωμετρικά, έχουμε παραμέτρηση επιφάνειας στο χώρο, παραδείγματος χάρην

$$\mathbf{r}(t, u) = ((3 - t \sin u) \cos 2u, (3 - t \sin u) \sin 2u, t \cos u), \quad (t, u) \in (-1, 1) \times (0, \pi).$$



Εξηγήστε γιατί η παραμέτρηση αυτή δίνει την $\mathcal{M}$ (εκτός φυσικά του τμήματος ταύτισης), όπως στο Σχήμα.

Δείξτε ότι υπάρχει παραμορφωτική σύμπτυξη της $\mathcal{M}$ στον κεντρικό της κύκλο ($t = 0$) και επομένως η ταινία έχει τον τύπο ομοτοπίας του κύκλου, αλλά δεν υπάρχει σύμπτυξη στον συνοριακό κύκλο της ($t = \pm 1$).

13. Στον τόρο $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, με α, β τους βρόχους

$$\alpha(t) = (e^{2\pi i t}, 1), \quad \beta(t) = (1, e^{2\pi i t}), \quad t \in I,$$

δείξτε (με χρήση κατάλληλου διαγράμματος) ότι $\alpha * \beta = \beta * \alpha$ (έτσι δικαιολογούμε γεωμετρικά ότι η θεμελιώδης ομάδα είναι αβελιανή).

14. Μία ομάδα G λέγεται **τοπολογική ομάδα** εάν έχει δομή τοπολογικού χώρου με τις απεικονίσεις γινομένου και αντιστρόφου να είναι συνεχείς:

$$\mu : G \times G \to G, \quad \iota : G \to G,$$

όπου $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ και $\iota(g) = g^{-1}$. Θεωρούμε τη θεμελιώδη ομάδα της G με σημείο βάσης τη μονάδα e. Εάν f, g είναι βρόχοι βασισμένοι στο e, ορίζουμε βρόχο γινόμενο $f \cdot g$ μέσω του γινομένου στην G: $(f \cdot g)(t) = f(t)g(t)$, $t \in I$.

Δείξτε ότι το γινόμενο των f, g στην π_1 είναι στην ίδια κλάση ομοτοπίας με τον παραπάνω βρόχο γινόμενο, $f * g \sim f \cdot g$, αλλά και $f \cdot g \sim g * f$, και επομένως η θεμελιώδης ομάδα της G είναι *αβελιανή*.

ΕΚ, 12-4-17