Κεφάλαιο 3

Αφινική Γεωμετρία

3.1 Ορισμός και απλά παραδείγματα

Η κλασική Γεωμετρία που μαθαίνουμε στο σχολείο, βασισμένη στον Ευκλείδη, δεν αναφέρεται σε διανύσματα, συντεταγμένες κοκ (ο όρος που χρησιμοποιείται είναι *Συνθετική Γεωμετρία*, σε αντιδιαστολή με την *Αναλυτική Γεωμετρία*, η οποία δίνει τον τίτλο του μαθήματός μας.) Θεωρεί βασικές έννοιες όπως σημείο, ευθεία κλπ. Κατά κανόνα, γίνεται στο επίπεδο ή στον τριδιάστατο χώρο. Στην Αναλυτική Γεωμετρία, και στη Γραμμική Άλγεβρα (αντικείμενα με σημαντικό ποσοστό επικάλυψης), στο επίπεδο και τον χώρο δίνεται η δομή *διανυσματικού χώρου* δύο και τριών διαστάσεων αντίστοιχα. Όπως παρατηρήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αυτό αναθέτει ιδιαίτερο ρόλο στο μηδενικό διάνυσμα. Η *Αφινική ή Ομοπαραλληλική Γεωμετρία* είναι μιά απόπειρα να διατηρήσουμε τον αναλυτικό χαρακτήρα της γεωμετρίας, αλλά παρακάμπτοντας την επιλογή αφετηρίας, που ούτως ή άλλως είναι κάτι τεχνητό.

Η παραπάνω απλή εξήγηση αρκεί προς το παρόν ως κίνητρο για τον ορισμό που ακολουθεί.[1]

Ορισμός 3.1. Εάν V^n είναι διανυσματικός χώρος στο σώμα k διάστασης n και X σύνολο, **δράση** (action) του V στο X ονομάζουμε απεικόνιση

$$\phi : X \times V \to X,\ (x, \mathbf{v}) \mapsto \phi(x, \mathbf{v}),$$

τέτοια ώστε $\phi(x, \mathbf{0}) = x$ για κάθε $x \in X$ και

$$\phi(\phi(x, \mathbf{v}), \mathbf{w}) = \phi(x, \mathbf{w} + \mathbf{v}).$$

Η τελευταία αυτή ιδιότητα είναι κρίσιμη και μας οδηγεί στην ερμηνεία της δράσης ως ένα είδος πρόσθεσης στα στοιχεία του συνόλου X διανυσμάτων από τον Δ.Χ. V. Για να ενθαρρύνουμε την ερμηνεία αυτή, θα γράψουμε το

[1] Αλλά αδικεί σε μεγάλο βαθμό τη σημασία της Αφινικής Γεωμετρίας, η οποία παίρνει τις πραγματικές της διαστάσεις μόνο στο σημείο όπου ορίζουμε κατάλληλη ομάδα μετασχηματισμών αφινικών χώρων! Αυτό θα γίνει αργότερα στο κεφάλαιο αυτό.

αποτέλεσμα της δράσης ως *γενικευμένη πρόσθεση* (ή μετατόπιση του σημείου κατά διάνυσμα), με το δικό της σύμβολο:

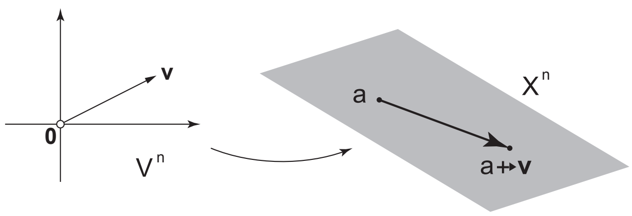
$$\phi(x, \mathbf{v}) = x \mathbin{+\!\!\!\to} \mathbf{v}.$$

Οι ιδιότητες του ορισμού γράφονται έτσι με πιό φυσικό τρόπο ως

$$x \mathbin{+\!\!\!\to} \mathbf{0} = x, \quad (x \mathbin{+\!\!\!\to} \mathbf{v}) \mathbin{+\!\!\!\to} \mathbf{w} = x \mathbin{+\!\!\!\to} (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Προσοχή! στην δεύτερη εξίσωση έχουμε δύο ειδών σύμβολα ¨σύν¨: το άθροισμα διανυσμάτων και την ¨πρόσθεση¨ διανύσματος σε στοιχείο του X.

Ορισμός 3.2. Αφινικός χώρος διάστασης n είναι ένα σύνολο X με μία δοθείσα δράση ενός διανυσματικού χώρου V^n στο X, που ονομάζουμε ¨πρόσθεση διανύσματος¨, τέτοια ώστε για κάθε επιλογή $a \in X$, η αντιστοίχιση $\mathbf{v} \to a \mathbin{+\!\!\!\to} \mathbf{v}$ από τον ΔΧ V στο σύνολο X να είναι 1:1 και επί (ο όρος bijection έχει επικρατήσει και θα τον προτιμούμε).



Σχήμα 3.1: Αφινικός χώρος X^n με δράση του διανυσματικού χώρου V^n.

Με άλλα λόγια, *επιλογή σημείου του X μετατρέπει το σύνολο X σε διανυσματικό χώρο.* Έτσι, δικαιολογείται πλήρως ο ισχυρισμός ότι οι αφινικοί χώροι είναι σαν τους διανυσματικούς, εκτός από την επιλογή αφετηρίας. Επίσης, διαχωρίσαμε επιτυχώς τις έννοιες **σημείων** (στοιχείων του X) και **διανυσμάτων** (στοιχείων του ΔΧ V). Χρειάζεται βέβαια προσοχή στο χειρισμό τους, και κάθε φορά που γράφουμε μιά μεικτή έκφραση, πρέπει να βεβαιωθούμε ότι είναι καλά ορισμένη.

Ας δώσουμε κάποια βασικά παραδείγματα

Παράδειγμα 3.1. Κάθε διανυσματικός χώρος V^n είναι και αφινικός χώρος, με την πρόσθεση διανυσμάτων ίδια με τη γενική πρόσθεση που ορίσαμε:

$$V^n \times V^n \to V^n : \ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

Εύλογη είναι η ερώτηση: σε τί βαθμό αυτό γενικεύει τον ορισμό του ΔΧ και σε τί ακριβώς διαφέρει; Η απάντηση είναι ότι τώρα θεωρούμε τυχαίο σημείο του ΔΧ ως νέα αφετηρία και επικεντρώνουμε τα διανύσματα σε αυτήν. Αν $\mathbf{v}_0$ είναι η επιλογή αυτή, η αντιστοίχιση στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{v} \in V^n$ στο $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$. Πρόκειται δηλαδή για *μετατόπιση* της αφετηρίας (ή του κέντρου των αξόνων.)

Παράδειγμα 3.2. Η ευθεία που ορίζεται στο επίπεδο από την εξίσωση $x+2y=1$ είναι αφινικός χώρος μίας διάστασης. Για να συνηθίσουμε τον ορισμό και να δούμε γιατί ακριβώς χρειάστηκε νέο σύμβολο, ας δώσουμε δράση του $\mathbf{R}^1$ στο σύνολο αυτό, δηλαδή στο

$$\ell = \{(x,y) \in \mathbf{R}^1 : x+2y=1\}.$$

Ας ορίσουμε λοιπόν:

$$\ell \times \mathbf{R}^1 \to \ell : ((x,y),u) \mapsto (x-2u, y+u),$$

δηλαδή $(x,y) \mathrel{+\!\!\!\!\to} u = (x-2u, y+u)$. Καθώς $x-2u+2(y+u) = x+2y = 1$, έχουμε πράγματι σημείο του συνόλου ℓ εφόσον το $(x,y) \in \ell$.

Προσοχή: η επιλογή δράσης *δεν είναι μοναδική!* Θα μπορούσαμε να ορίσουμε δράση

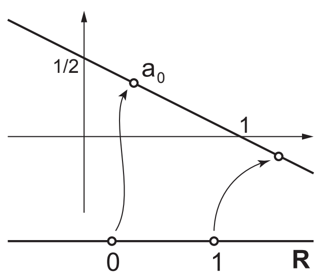
$$\ell \times \mathbf{R}^1 \to \ell : ((x,y),u) \mapsto (x+4u, y-2u).$$

Συγκρίνοντας με την παραμετρική μορφή ευθείας που δώσαμε πριν, βλέπουμε ότι η προσέγγιση μέσω αφινικού χώρου είναι ουσιαστικά το ίδιο με το να γράψουμε την ευθεία ως

$$\ell(a_0, \mathbf{v}) = \{x_0 + t\mathbf{v},\ t \in \mathbf{R}^1\},$$

όπου $a_0 \in \ell$ και το $\mathbf{v}$ είναι διάνυσμα κατεύθυνσης της ευθείας. Στο Παράδειγμά μας, για $\mathbf{v}$ μπορούμε να επιλέξουμε το $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ή το $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, που αντιστοιχούν στις δύο επιλογές δράσης που μόλις δώσαμε!

Γεωμετρικά, λοιπόν, θα λέγαμε ότι επιλογή δράσης ορίζει τον τρόπο με τον οποίο η πραγματική ευθεία $\mathbf{R}^1$ "κολλάει" πάνω στο αφινικό χώρο $\ell \subset \mathbf{R}^2$: το μηδενικό στοιχείο $0 \in \mathbf{R}^1$ πηγαίνει σε επιλογή σημείου $a_0 = (x_0, y_0)$ της ℓ και το $1 \in \mathbf{R}^1$ στο σημείο $a_0 \mathrel{+\!\!\!\!\to} 1$. Τα υπόλοιπα σημεία έχουν την προφανή αντιστοίχιση (Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2: Η δράση του $\mathbf{R}^1$ στην ευθεία ℓ, με αρχή το a_0: το 0 πηγαίνει στο σημείο a_0, το διάνυσμα 1 σε σημείο $a_0 \mathrel{+\!\!\!\!\to} 1$ και όλα τα άλλα σε κατάλληλα κλιμακωμένα πολλαπλάσια του σημείου αυτού.

Επιστρέφουμε τώρα στον ορισμό αφινικού χώρου. Μιά κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι η τελευταία συνθήκη του ορισμού λέει ότι για a, b *οποιαδήποτε* σημεία του X, *υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα* $\mathbf{v}$ ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση $a \nrightarrow \mathbf{v} = b$. Είναι δηλαδή σαν να ορίζουμε το $\mathbf{v}$ ως τη διαφορά των a και b: $\mathbf{v} = b - a$. Από την μοναδικότητα, έχουμε καλό ορισμό και έτσι οδηγούμαστε στον δεύτερο, εναλλακτικό ορισμό αφινικού χώρου:

Ορισμός 3.3 (Δεύτερος ορισμός Αφινικού Χώρου)**.** Το σύνολο X είναι **αφινικός χώρος** διάστασης n εάν ορίζεται απεικόνιση από το καρτεσιανό γινόμενο $X \times X$ σε διανυσματικό χώρο V^n

$$X \times X \to V^n, \ (a, b) \mapsto \overrightarrow{ab} \in V^n,$$

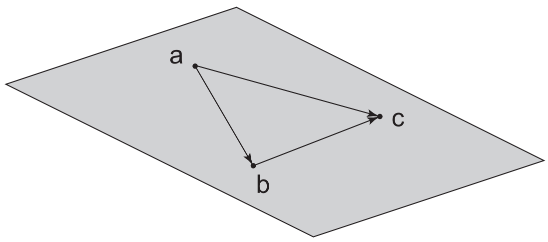
(με το διάνυσμα εικόνας να θεωρείται η **διαφορά** των σημείων a και b και να γράφεται $\overrightarrow{ab} = b - a$), τέτοια ώστε, αν $(a, b) \mapsto \overrightarrow{ab}$, $(b, c) \mapsto \overrightarrow{bc}$ και $(a, c) \mapsto \overrightarrow{ac}$ για a, b, c τρία σημεία του X, τότε τα τρία διανύσματα ικανοποιούν τη σχέση

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}.$$

Η σχέση αυτή λέγεται συχνά *ταυτότητα του Chasles*. Με χρήση του νέου ορισμού διαφοράς, λέει απλά ότι

$$c - a = (c - b) + (b - a)$$

με προφανές γεωμετρικό περιεχόμενο (Σχήμα 3.3).



Σχήμα 3.3: Η ταυτότητα του Chasles σε αφινικό χώρο.

Για να συνοψίσουμε λίγο αυτά που έχουμε ορίσει έως τώρα: διακρίναμε *σημεία* και *διανύσματα* και επιτρέψαμε δύο τρόπους να τα συνδέσουμε, με μετατόπιση σημείου από διάνυσμα $a \nrightarrow \mathbf{v}$ (πρώτος ορισμός) ή με διαφορά σημείων $b - a$ που δίνει διάνυσμα, το διάνυσμα ακριβώς που θα χρειαζόταν για να μας πάει από το πρώτο στο δεύτερο σημείο (δεύτερος ορισμός). Στα παραδείγματα είδαμε ότι πράγματι σημεία και διανύσματα είναι διαφορετικές έννοιες, συχνά διαφορετικής ¨διάστασης¨. Τέλος, χρειάζεται προσοχή στο χειρισμό των αντικειμένων αυτών: η έκφραση $(a - b) - c$ δεν έχει έννοια, αλλά η $a + (b - c)$ έχει, εφόσον το ¨συν¨ ερμηνευτεί με την έννοια του $\nrightarrow$ *(γιατί;)*

3.2 Υποχώροι, ανεξαρτησία και βάσεις

Είδαμε ότι σε αφινικό χώρο X^n όπου έχουμε επιλέξει κεντρικό σημείο a_0 (αφετηρία) όλα τα άλλα σημεία είναι σε 1:1 αντιστοίχιση με τα διανύσματα του ΔΧ V^n ο οποίος δρα στον X^n: $\mathbf{v} \mapsto a_0 \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} \mathbf{v}$. Αν επιλέξουμε βάση

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$$

του ΔΧ αυτού, τότε τα σημεία του X^n είναι τα

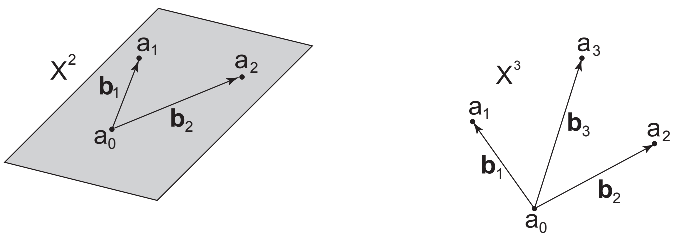
$$a = a_0 \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} \mathbf{v} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{b}_i,$$

όπου x_i είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{v}$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Ας *ορίσουμε* τώρα n σημεία $a_i = a_0 \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} \mathbf{b}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Εναλλακτικά, έχουμε ότι τα διανύσματα βάσης είναι οι διαφορές των a_i με το αρχικό σημείο a_0: $\mathbf{b}_i = a_i - a_0$ (Σχήμα 3.4). Έτσι, έχουμε

$$a = a_0 \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} \sum_{i=1}^{n} x_i (a_i - a_0).$$

Στο σημείο αυτό, εάν επιτρέψουμε την ομαδοποίηση συντελεστών για κάθε



Σχήμα 3.4: Ορισμός $n+1$ σημείων με μετατοπίσεις του κεντρικού σημείου a_0 με τα n διανύσματα βάσης του ΔΧ (παραδείγματα σε 2 και 3 διαστάσεις).

σημείο[2]

$$a = (1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n)a_0 + x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n,$$

και παρατηρούμε ότι έχουμε αυτό ακριβώς που είχαμε ορίσει ως **αφινικό συνδυασμό σημείων**, καθώς το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με ένα!

Τα $(n+1)$ σημεία $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ του ΑΧ X^n είναι "προνομιούχα", με την έννοια ότι οι n διαφορές τους με το κεντρικό σημείο a_0 δίνουν βάση του ΔΧ V^n. Οδηγούμαστε λοιπόν στον εξής ορισμό:

Ορισμός 3.4. Σε ΑΧ X^n, επιλογή $(n+1)$ σημείων του $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ τέτοια ώστε τα διανύσματα διαφοράς $\mathbf{b}_i = a_i - a_0$ δίνουν βάση του ΔΧ V^n λέγεται **αφινική βάση** του χώρου X^n.

[2] Κάτι που θα επιτρέψουμε, αλλά πάντα με την παραδοχή ότι είναι ισοδύναμο με τον προηγούμενο τύπο, ο οποίος δικαιολογείται πλήρως από τον ορισμό.

Αφινικοί συνδυασμοί: Τώρα που έχουμε δει πώς να περνάμε από το αφινικό άθροισμα $\nrightarrow$ σημείου με διάνυσμα σε αφινικό συνδυασμό *σημείω μόνο*, δεν χρειάζεται να περιοριστούμε σε αφινικούς συνδυασμούς που προκύπτουν από την παραπάνω ανάλυση: εάν έχουμε m σημεία $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ του χώρου X^n, κάθε επιλογή συντελεστών $t_1, \ldots, t_m$ με $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ δίνει[3] αφινικό συνδυασμό

$$t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_m a_m.$$

Ισχυριζόμαστε ότι αυτό δίνει σημείο του χώρου X^n. Καθώς $t_1 = 1 - \sum_{i=2}^m t_i$, και με την με παραδοχή ότι το a_1 θα παίζει το ρόλο της αρχής, έχουμε

$$a = a_1 + t_2(a_2 - a_1) + \ldots + t_m(a_m - a_1),$$

το οποίο μπορούμε να ερμηνεύσουμε ως αφινικό άθροισμα του *σημείου* a_0 με το *διάνυσμα* $\sum_{i=2}^m t_i(a_i - a_1)$. Αυτό το τελευταίο είναι διάνυσμα καθώς από τον δεύτερο ορισμό κάθε διαφορά σημείων δίνει διάνυσμα, και όλα έχουν αρχή το ίδιο σημείο a_1. Έτσι καθησυχασμένοι, λοιπόν, στο εξής θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τους αφινικούς συνδυασμούς.

Βλέπουμε παρεμπιπτόντως ότι η έννοια του αφινικού συνδυασμού είναι πιό ¨συμμετρική¨ ως προς τα σημεία του (όπως είχαμε παρατηρήσει και πριν): κανείς δεν μας εμποδίζει να επιλέξουμε άλλο σημείο ως αφετηρία, π.χ. το a_m, οπότε να γράψουμε

$$a = a_m + t_1(a_1 - a_m) + t_2(a_2 - a_m) + \ldots + t_{m-1}(a_{m-1} - a_m)!$$

Οποιαδήποτε άλλη επιλογή αφετηρίας δίνει κάτι παρόμοιο.

Είναι σαφές ότι οι *αφινικοί συνδυασμοί* θα παίξουν ανάλογο ρόλο στην Αφινική Γεωμετρία με αυτόν των *γραμμικών συνδυασμών* σε διανυσματικούς χώρους. Με βάση τα παραπάνω, η αντιστοίχιση με όρους της Γραμμικής Άλγεβρας είναι εύκολη υπόθεση και μάλιστα υποδεικνύει τρόπους χρήσης των. Αυτό θα αναπτύξουμε αμέσως τώρα.

Ορισμός 3.5. Εάν δίνονται σημεία $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ του αφινικού χώρου X^n, ορίζουμε το **αφινικό** τους **ανάπτυγμα** ως

$$\mathrm{affspan}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i a_i,\ \sum_{i=1}^m t_i = 1 \right\}.$$

(Δηλαδή το σύνολο όλων των αφινικών συνδυασμών τους.)

Ορισμός 3.6. Ένα υποσύνολο του ΑΧ X^n είναι **αφινικός υποχώρος** του εάν για οποιαδήποτε σημεία του, περιλαμβάνει και όλους τους αφινικούς συνδυασμούς τους.

[3] Μας βολεύει να αλλάξαμε το σύμβολο των συντελεστών από x_i σε t_i.

Είναι έτσι προφανές ότι κάθε αφινικό ανάπτυγμα δίνει αφινικό υποχώρο.[4] Πρέπει να είναι επίσης προφανές ότι εάν επιλέξουμε σημείο αφετηρίας και θεωρήσουμε όλα τα διανύσματα διαφοράς, ο αφινικός υποχώρος θα αντιστοιχίσει σε διανυσματικό υποχώρο του V^n.

Απλά παραδείγματα: για ένα σημείο, το ανάπτυγμα είναι πάλι το μονοσύνολο του σημείου αυτού (γιατί;). Για δύο διακριτά σημεία, έχουμε αφινικό ανάπτυγμα

$$\mathrm{affspan}(a_1, a_2) = \{t_1 a_1 + t_2 a_2,\ t_1 + t_2 = 1\} = \{(1-t)a_1 + t a_2, t \in \mathbf{R}\},$$

το οποίο αναγνωρίζουμε ως την ευθεία που περνά από τα σημεία αυτά.

Για να προχωρήσουμε περαιτέρω, θα χρειαστούμε αφινική μορφή της έννοιας εξάρτησης και ανεξαρτησίας *σημείων* (μας βολεύει να πάρουμε πλήθος $m+1$ αντί m και να αρχίσουμε από δείκτη 0):

Ορισμός 3.7. Τα $m+1$ σημεία ($m \geq 0$) $(a_0, \ldots, a_m)$ του ΑΧ X^n είναι **αφινικά ανεξάρτητα** εάν τα m διανύσματα διαφοράς $\mathbf{b}_1 = a_1 - a_0, \ldots, \mathbf{b}_m = a_m - a_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον ΔΧ V^n.

Φτάσαμε έτσι και στον ορισμό *βάσης* αφινικού χώρου. Όπως πάντα, έχουμε δύο ισοδύναμες επιλογές: η πρώτη είναι να μετατρέψουμε τον ΑΧ σε ΔΧ με επιλογή αφετηρίας και να επιλέξουμε βάση του ΔΧ. Η δεύτερη αποφεύγει την επιλογή αυτή και παραμένει σε επίπεδο σημείων.

Ορισμός 3.8 (Βάσεις)**.** 1) Σε αφινικό χώρο $(X^n, V^n, \not\leftrightarrow)$ διάστασης n, επιλογή σημείου a_0 ως αρχή/αφετηρία και επιλογή βάσης $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ του ΔΧ V^n δίνει **βάση** του ΑΧ, που λέγεται και **πλαίσιο (frame)** του X^n.

2) Στον ΑΧ $(X^n, V^n, \not\leftrightarrow)$ διάστασης n, **αφινική βάση** του είναι επιλογή $n+1$ σημείων τα οποία είναι αφινικά ανεξάρτητα και έχουν αφινικό ανάπτυγμα όλο το X^n.

Εάν $(a_0, \mathcal{B})$ είναι πλαίσιο, είδαμε ήδη ότι κάθε σημείο $a \in X^n$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $a = a_0 \not\leftrightarrow \mathbf{v}$, για κάποιο $\mathbf{v} \in V^n$ και το $\mathbf{v}$ γράφεται με μοναδικό επίσης τρόπο μέσω της βάσης:

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + x_n \mathbf{b}_n.$$

Για τη δεύτερη μορφή του ορισμού βάσης, χρησιμοποιούμε τον ορισμό αφινικής ανεξαρτησίας. Θυμίζουμε ότι στη μορφή αυτή, έχουμε ελευθερία στην επιλογή σημείου αφετηρίας.

Στις δύο μορφές βάσης αντιστοιχούν και δύο είδη συντεταγμένων:

[4] Καθώς πρέπει να επιτρέψουμε και την πιθανότητα να έχουμε κενό σύνολο σημείων, ως τετριμμένη περίπτωση αφινικού υποχώρου θεωρείται το κενό σύνολο. Αυτή η διαφορά με τους διανυσματικούς χώρους έχει κάποια λογική: τομή διανυσματικών υποχώρων δεν είναι ποτέ κενή, καθώς πάντα περιλαμβάνει το μηδενικό διάνυσμα. Τομή αφινικών υποχώρων, όμως, μπορεί κάλλιστα να είναι κενή!

Ορισμός 3.9. 1) Εάν έχουμε πλαίσιο $(a_0, \mathcal{B})$ του ΑΧ X^n, οι **αφινικές συντεταγμένες** σημείου $a \in X^n$ ως προς το πλαίσιο είναι οι n αριθμοί $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ που δίνουν το διάνυσμα $\mathbf{v}$, με $a = a_0 \nrightarrow \mathbf{v}$, ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

2) Οι **βαρυκεντρικές συντεταγμένες** του σημείου $a \in X^n$ ως προς την αφινική βάση $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ είναι οι $n+1$ αριθμοί t_i, όπου το a δίνεται από τον αφινικό συνδυασμό

$$a = t_0 a_0 + t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n.$$

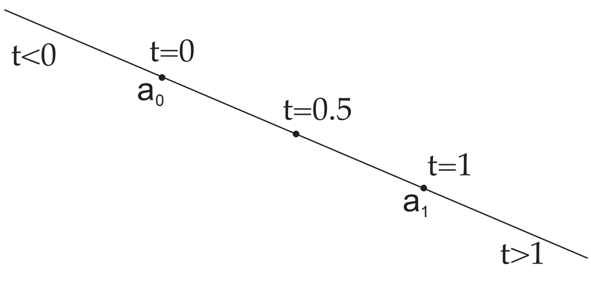
Προσοχή: το άθροισμά τους είναι πάντα ίσο με μονάδα.[5]

Ας δούμε τα βασικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.3 (**Ευθεία**). Αφινικός χώρος μίας διάστασης θεωρείται ότι είναι *ευθεία* (με τη συνήθη ερμηνεία από την σχολική γεωμετρία). Αφινική βάση του είναι δύο διακριτά σημεία (a_0, a_1) (καθώς η διαφορά τους $a_1 - a_0$ είναι μη-μηδενικό, και επομένως ¨γραμμικά ανεξάρτητο¨ διάνυσμα!) Εκφράζοντας την ευθεία ως το αφινικό ανάπτυγμα

$$\ell = \{t_0 a_0 + t_1 a_1,\ t_0 + t_1 = 1\} = \{(1-t)a_0 + t a_1,\ t \in \mathbf{R}\}$$

βλέπουμε ότι αρκεί να δώσουμε *μία μόνο* βαρυκεντρική συντεταγμένη, την τιμή του t. Έτσι, το a_0 αντιστοιχεί στο $t = 0$, το $t = 1$ στο a_1, για $t = 1/2$ έχουμε το μέσο σημείο $(a_0+a_1)/2$, για $t > 1$ έχουμε σημεία από την εξωτερική πλευρά του a_1 και για $t < 0$ σημεία στην εξωτερική πλευρά του a_0 (βλ. το Σχήμα 3.5).



Σχήμα 3.5: Παραμέτρηση της αφινικής ευθείας με βάση τα σημεία a_0, a_1. Το διάστημα από το a_0 στο a_1 αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, 1] \subset \mathbf{R}^1$.

Εάν θεωρήσουμε ότι έχουμε διαθέσιμα βάρη συνολικής μάζας μίας μονάδας βάρους και τοποθετήσουμε ποσοστό $(1-t)$ στο σημείο a_0 και t στο a_1, τότε το σημείο της ευθείας με βαρυκεντρικές συντεταγμένες $(1-t, t)$ είναι, από τις στοιχειώδεις έννοιες της Φυσικής, ακριβώς το **κέντρο βάρους** των μαζών.

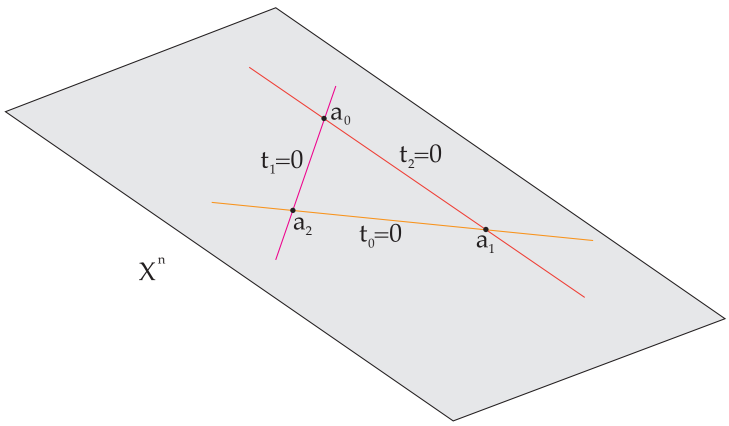
[5] Ο λόγος για το όνομα ¨βαρυκεντρικές¨ θα φανεί πολύ σύντομα, στο παράδειγμα του επιπέδου 3.4.

Καθώς μάζες είναι θετικές, η φυσική αναλογία αυτή ισχύει μόνο για τιμές του t στο διάστημα $[0,1]$, οπότε και παίρνουμε σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο σημεία. Αν επιτρέψουμε ¨αρνητικές¨ μάζες, τότε έχουμε γενικευμένο κέντρο βάρους, που δίνεται πάλι από το σημείο με συντεταγμένες $(1-t,t)$.

(Ο πρώτος ορισμός βάσης μας μεταφέρει σε ΔΧ, όπου η ανάλυση της ευθείας ακολουθεί ακριβώς τα ίχνη της ανάλυσής μας στο προηγούμενο κεφάλαιο 2.5.1, κι έτσι παραλείπεται.)

Παράδειγμα 3.4 (**Επίπεδο**). Αφινικός χώρος δύο διαστάσεων θεωρείται ότι είναι επίπεδο. Έστω (a_0,a_1,a_2) αφινική βάση. Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες (t_0,t_1,t_2) μπορούν να σμικρυνθούν σε δύο (όπως κάναμε για την ευθεία), αλλά είναι καλύτερο να τις αφήσουμε ως έχουν, προς το παρόν. Θα μπορέσουμε να εξηγήσουμε έτσι και την ερμηνεία τους ως βαρύκεντρα.

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι από την υπόθεση ότι τα τρία σημεία δίνουν βάση έπεται ότι έχουμε μη-εκφυλισμένο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία a_0,a_1 και a_2. Για $t_0=0$, έχουμε αφινικούς συνδυασμούς των δύο απομεινάντων σημείων, δηλαδή την ευθεία που ορίζουν τα a_1,a_2. Ανάλογα, $t_1=0$ δίνει την ευθεία των a_0,a_2 και $t_2=0$ την ευθεία a_0,a_1 (Σχήμα 3.6).



Σχήμα 3.6: Βαρυκεντρικές συντεταγμένες σε αφινικό επιπεδο με αφινική βάση (a_0,a_1,a_2).

Μπορούμε να προχωρήσουμε λίγο παραπέρα: από το προηγούμενο παράδειγμα της ευθείας, παρατηρούμε ότι τιμές του t στο διάστημα $[0,1]$ δίνουν σημεία μεταξύ των a_0 και a_1, δηλαδή πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει. Έτσι η πλευρά a_1a_2 περιγράφεται ως το σύνολο σημείων με συντεταγμένες (t_0,t_1,t_2) με $t_0=0$ και με $t_1+t_2=1$ και επιπλέον $t_1,t_2>0$ (γιατί;)

Πρόταση 3.1. *Το **τρίγωνο** $\triangle(a_0,a_,a_2)$ είναι το υποσύνολο*

$$\{t_0a_0+t_1a_1+t_2a_2,\ t_0+t_1+t_2=1,\ t_0,t_1,t_2\geq 0\}$$

του AXX^n.

Το τρίγωνο είναι ***κυρτό*** *υποσύνολο, με την έννοια ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία του, περιλαμβάνει και το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει.*

Απόδειξη. Άσκηση. Εναλλακτικά, τί θα λέγατε για το ακόλουθο επιχείρημα από την Φυσική: αν στις τρεις κορυφές τοποθετήσουμε *θετικές* μάζες, με συνολική μάζα ένα, το κέντρο βάρους βρίσκεται εντός του τριγώνου! □

Μπορούμε να δώσουμε τώρα μιά καθαρά αφινική απόδειξη ενός γνωστού αποτελέσματος της Γεωμετρίας:

Θεώρημα 3.1. *Οι τρεις διάμεσοι τυχόντος τριγώνου τέμνονται σε κοινό σημείο.*

Απόδειξη. Οι αφινικές εξισώσεις των διαμέσων είναι εύκολο να δοθούν: συνδέεουν κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς του τριγώνου. Έτσι είναι οι τρεις ευθείες

$$\begin{aligned}\ell_0 &= \{(1-t)a_0 + t(a_1+a_2)/2,\ t \in \mathbf{R}\},\\ \ell_1 &= \{(1-t)a_1 + t(a_0+a_2)/2,\ t \in \mathbf{R}\},\\ \ell_2 &= \{(1-t)a_2 + t(a_0+a_1)/2,\ t \in \mathbf{R}\}.\end{aligned}$$

Ας βρούμε την τομή των δύο πρώτων (όπου αλλάζουμε το όνομα της βαρυκεντρικής συντεταγμένης της δεύτερης ευθείας). Ζητούμε τιμές των t, s ώστε να έχουμε κοινό σημείο:

$$(1-t)a_0 + t(a_1+a_2)/2 = (1-s)a_1 + s(a_0+a_2)/2.$$

Η εξίσωση δίνει τις ισότητες: $(1-t) = s/2$, $t/2 = 1-s$ και $t/2 = s/2$, που έχουν μοναδική λύση $t = s = 2/3$. Το κοινό σημείο είναι ακριβώς το $(a_0+a_1+a_2)/3$. Αλλά το σημείο αυτό ανήκει και στην τρίτη διάμεσο ℓ_2 (θέτοντας $t = 2/3$ στην αφινική μορφή της ℓ_2). Είναι προφανές ότι το σημείο $(a_0+a_1+a_2)/3$ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου αν θέσουμε από ένα τρίτο της συνολικής μάζας σε κάθε κορυφή. □

Η σύγκριση με την συνθετική απόδειξη του αποτελέσματος αυτού (στο Σχήμα 3.7 η απόδειξη που δίνει το σχολικό βιβλίο Ευκλείδειας Γεωμετρίας) είναι ενδιαφέρουσα. Τίθεται ίσως το ερώτημα: μήπως μπορούμε να δείξουμε με παρόμοιο άμεσο τρόπο και άλλες ιδιότητες τριγώνων, π.χ. το κοινό σημείο των τριών καθέτων ή διχοτόμων; Η απάντηση είναι ότι σαφώς και υπάρχουν αναλυτικές αποδείξεις, αλλά δεν ανήκουν στο αντικείμενο της Αφινικής Γεωμετρίας, καθώς υπεισέρχονται έννοιες *καθετότητας* και *γωνίας*, οι οποίες προς το παρόν δεν ανήκουν στο σύμπαν της αφινικής θεώρησης που αναπτύσσουμε. Γενικά, αφινικός (ή διανυσματικός) χώρος είναι σύνολο όπου ορίζονται αφινικοί (ή γραμμικοί) συνδυασμοί, αλλά τίποτε επιπλέον. Αργότερα, θα προσθέσουμε στη δομή αυτή και την έννοια του *εσωτερικού γινομένου*, που θα μας δώσει έννοιες μήκους, καθετότητας και γωνίας —αλλά αυτή θα είναι η ακριβώς η Ευκλείδεια Γεωμετρία.

5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή $B_1 + \Gamma_1 B + \Gamma\ 2A\Delta$.

i) Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα ΘΚ = ΑΘ. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε $E\Theta = // \frac{\Gamma K}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε $Z\Theta = // \frac{BK}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΕ //ΓΚ και ΓΖ // ΒΚ, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε ΒΔ = ΔΓ.
Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται ***βαρύκεντρο*** (ή ***κέντρο βάρους***) του τριγώνου.
ii) Από το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη

$$\Theta\Delta = \Delta K = \frac{\Theta K}{2}, \text{ άρα } \Theta\Delta = \frac{A\Theta}{2} \text{ ή } A\Theta = 2\Theta\Delta.$$

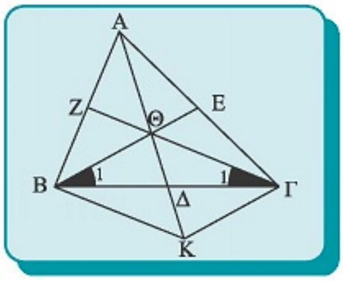
Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$E\Theta = \frac{\Gamma K}{2} = \frac{B\Theta}{2} \text{ ή } B\Theta = 2\Theta E.$$

Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε ΓΘ = 2ΘΖ. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Επίσης έχουμε ότι ΑΔ = ΑΘ + ΘΔ = 2ΘΔ + ΘΔ = 3ΘΔ. Άρα

$$\Theta\Delta = \frac{1}{3}A\Delta, \text{ οπότε } A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta.$$

Όμοια προκύπτει ότι $B\Theta = \frac{2}{3}BE$ και $\Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma Z$.



Σχήμα 26

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην παραπάνω πρόταση θεωρήσαμε το σημείο τομής Θ των δύο διαμέσων ΒΕ και ΓΖ και αποδείξαμε ότι η ΑΘ αν προεκταθεί είναι η τρίτη διάμεσος ΑΔ.
*Αυτός ο τρόπος αποτελεί μια **βασική μέθοδο** για να αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες **συντρέχουν** σε κάποιο σημείο.*

Σχήμα 3.7: Συνθετική απόδειξη του θεωρήματος ύπαρξης κοινού σημείου των διαμέσων τριγώνου (σελίδα από το βιβλίο *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Γενικού Λυκείου*).

3.3 Τα βασικά παραδείγματα αφινικών χώρων

Πριν προχωρήσουμε στην περαιτέρω μελέτη των αφινικών χώρων και των απεικονίσεών τους, καλό είναι να οργανώσουμε τις βασικές κατηγορίες παραδειγμάτων όπου χρειαζόμαστε την έννοια του αφινικού, σε αντιδιαστολή με διανυσματικού, χώρου.

1. *Διανυσματικοί χώροι* ως αφινικοί χώροι, με τη μόνη διαφορά να είναι στην αυθαίρετη επιλογή αφετηρίας. Ουσιαστικά πρόκειται για μετατοπίσεις ΔΧ. Θυμίζουμε ότι κάθε επιλογή αρχικού διανύσματος $\mathbf{v}_0$ δίνει 1:1, επί απεικόνιση (bijection) του ΔΧ V^n με τον εαυτό του, μέσω της απεικόνισης $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$.

2. *Αφινικοί υποχώροι διανυσματικού χώρου* V^N. Καθώς ο ορισμός αφινικής ανεξαρτησίας μπορεί να εφαρμοστεί και για $n+1$ διανύσματα

$$(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

του ΔΧ V^N (απαιτώντας τη γραμμική ανεξαρτησία των n διανυσμάτων διαφοράς $\mathbf{b}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0$), ένας συνήθης τρόπος να πάρουμε αφινικό χώρο διάστασης n είναι με επιλογή $n+1$ αφινικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

Είναι σαφές ότι ο χώρος που παίρνουμε είναι *παράλληλη μετατόπιση* του διανυσματικού υποχώρου που ορίζεται ως το κανονικό ανάπτυγμα $\mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ των διανυσμάτων διαφοράς, με τα διανύσματα αυτά να δίνουν βάση του. Είναι επίσης σαφές ότι έχουμε

$$\mathrm{affspan}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_0 + \mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n).$$

Για παράδειγμα αν $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ είναι δύο διακριτά, μη-μηδενικά διανύσματα, έχουμε ευθεία $\mathrm{affspan}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_0 + \mathrm{span}(\mathbf{b})$, όπου $\mathbf{b} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$. Η ευθεία αυτή δεν είναι γενικά διανυσματικός υποχώρος (δεν περνά από το $\mathbf{0}$), εκτός εάν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά. Δύο ευθείες $\mathrm{affspan}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$, $\mathrm{affspan}(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1)$ είναι *παράλληλες* εάν και μόνον εάν τα διανύσματα διαφοράς $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$, $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0$ είναι συγγραμμικά *(γιατί;)*

3. *Σύνολα λύσεων γραμμικών συστημάτων εξισώσεων.* Όπως έχουμε δει, η δομή του συνόλου λύσεων του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ (εφόσον είναι μη-κενό) είναι: $\mathbf{x}_p + \ker A$, όπου $\mathbf{x}_p$ είναι κάποια ειδική λύση και $\ker A$ είναι ο πυρήνας του A (ο οποίος είναι πάντοτε υποχώρος του χώρου $\mathbf{R}^n$). Έχουμε αμέσως αφινικό υποχώρο του $\mathbf{R}^n$, δηλαδή είμαστε ουσιαστικά στην προηγούμενη περίπτωση.

Δύο ειδικές περιπτώσεις βρίσκουν πολλές εφαρμογές:

(α΄) Παράλληλες μετατοπίσεις υποχώρων διάστασης $N-1$,[6] για παράδειγμα το οριζόντιο επίπεδο του χώρου $\mathbf{R}^3$. Πιό γενικά, το σύνολο

[6] Τέτοιοι υποχώροι λέγονται συχνά υπερ-επίπεδα (hyperplanes) του ΔΧ.

που ορίζεται στο $\mathbf{R}^N$ από την εξίσωση $x_i = 1$. Αυτή είναι η μορφή με την οποία εμφανίζονται οι αφινικοί χώροι στην *Αλγεβρική Γεωμετρία* (έναν τεράστιο κλάδο των Μαθηματικών που, δυστυχώς, συναντά κανείς συνήθως σε μεταπτυχιακό επίπεδο για πρώτη φορά.)

(β΄) Στο $\mathbf{R}^{n+1}$, το σύνολο που ορίζεται από τη μοναδική εξίσωση:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1.$$

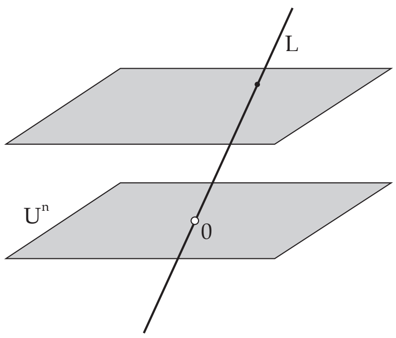
Είναι υπο-επίπεδο του ΔΧ $\mathbf{R}^{n+1}$.

4. *Σύνολο συμπληρωματικών ευθειών δοθέντος υποχώρου ΔΧ.* Εδώ έχουμε επιτέλους κάτι που δεν έχουμε δει πριν! Εννοούμε το εξής:

Δίνεται στον $\mathbf{R}^{n+1}$ υπερ-επίπεδο U^n, π.χ. το $x_{n+1} = 0$. Είναι υποχώρος του $\mathbf{R}^{n+1}$ διάστασης n. Τώρα κάθε ευθεία L η οποία δεν περιέχεται στο U^n είναι συμπλήρωμα του U^n, με την έννοια ότι το άθροισμα $U^n + L$ είναι *ευθύ* και δίνει όλο τον ΔΧ:

$$U^n \oplus L = \mathbf{R}^{n+1}.$$

Θέλουμε να δώσουμε στο σύνολο τέτοιων ευθειών τη δομή αφινικού χώρου διάστασης n! Ο τρόπος είναι σχετικά απλός (και τον συναντάμε στην Προβολική Γεωμετρία): καθώς κάθε τέτοια ευθεία τέμνει τον αφινικό χώρο $\mathbf{e}_{n+1} + U^n$ (παράλληλη μετατόπιση του U^n κάθετα κατά το μοναδιαίο διάνυσμα βάσης $\mathbf{e}_{n+1}$) σε μοναδικό σημείο, έχουμε μία 1:1 και επί αντιστοίχιση μεταξύ τους (Σχήμα 3.8). Αποδεικνύεται ότι έτσι δίνουμε στο σύνολο των συμπληρωμάτων του U^n τη δομή του αφινικού χώρου $\mathbf{e}_{n+1} + U^n$, που έχει διάσταση n.



Σχήμα 3.8: Το σύνολο των συμπληρωματικών ευθειών του οριζόντιου επιπέδου είναι αφινικός χώρος ίδιας διάστασης με το επίπεδο.

Συμβολισμός: έχει επικρατήσει να γράφουμε $\mathbb{A}^n$ για αφινικό χώρο n διαστάσεων. Αν θέλουμε να ξεκαθαρίσουμε το σώμα k στο οποίο ορίζεται, γράφουμε $\mathbb{A}^n_k$. Η βασική περίπτωση είναι λοιπόν ο ΑΧ $\mathbb{A}^n_{\mathbf{R}}$.

3.3.1 Ένα λεπτομερές παράδειγμα

Στον πραγματικό χώρο θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta\},$$

για συντελεστές $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Έχουμε προφανώς *επίπεδο*, το οποίο, εφόσον $\delta \neq 0$ είναι αφινικός, αλλά όχι διανυσματικός υποχώρος. Έχουμε λοιπόν παράδειγμα της δεύτερης κατηγορίας. (Για ευκολία, σε κάθε χώρο θεωρούμε ότι έχουμε την κανονική της βάση.)

Με όρους *γραμμικών απεικονίσεων*, το σύνολο αυτό είναι η αντίστροφη εικόνα του $\delta \in \mathbf{R}^1$ της γραμμικής απεικόνισης

$$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^1, \quad (x, y, z) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Γνωρίζουμε ότι έχουμε αφινικό χώρο δύο διαστάσεων, αλλά υπάρχουν πολλοί τρόποι να δώσουμε δράση του $\mathbf{R}^2$ στο σύνολο αυτό:

$$\mathcal{P} \times \mathbf{R}^2 \to \mathcal{P} : \ (x, y, z) \nrightarrow \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} =?$$

Ως επιλογή *πρώτου τρόπου*, και αν υποθέσουμε ότι το επίπεδο *δεν είναι οριζόντιο*, δηλαδή $\gamma \neq 0$,[7] δοκιμάζουμε να στείλουμε

$$x \mapsto x + s, \ y \mapsto y + t.$$

Αλλά τότε, για να έχουμε σημείο του επιπέδου, η επιλογή του $z \mapsto z + u$ πρέπει να είναι τέτοια ώστε

$$\alpha(x + s) + \beta(y + t) + \gamma(z + u) = \delta,$$

οπότε: $\gamma u = -(\alpha s + \beta t)$, δηλαδή $u = -(\alpha s + \beta t)/\gamma$ (καθώς υποθέσαμε ότι το σημείο $(x, y, z) \in \mathcal{P}$.)

Η δράση είναι λοιπόν

$$\mathcal{P} \times \mathbf{R}^2 \to \mathcal{P} : \ (x, y, z) \nrightarrow \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \left(x + s, y + t, z - \frac{(\alpha x + \beta y)}{\gamma} \right).$$

Ποιά είναι η σχέση του τύπου αυτού με τη θεωρία που έχουμε δώσει περί λύσεων ΓΣΕ; Δεν είναι δύσκολή η ερμηνεία του. Το σημείο (x, y, z) υποθέσαμε ανήκει στο επίπεδο, οπότε παίζει το ρόλο της *ειδικής λύσης*. Οι δύο βαθμοί ελευθερίας θα πρέπει τότε να συνδέονται με τη διάσταση του πυρήνα της απεικόνισης. Αλλά εδώ έχουμε πράγματι $\dim \ker A = 2$ καθώς πηγαίνουμε από τρεις σε μία διάσταση και $\operatorname{rank} A = 1$ (A είναι ο 1×3 πίνακας (α, β, γ).)

[7] Παρόμοια δουλεύουμε αν άλλος συντελεστής είναι μη-μηδενικός, οπότε δεν έχουμε χάσει γενικότητα.

Μάλιστα, οι όροι με το s και με το t συνδέονται με διανύσματα βάσης του πυρήνα! Πράγματι, στο ομογενές γραμμικό σύστημα του αρχικού ΓΣΕ:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

θέτοντας $x = s$ αυθαίρετο και $y = 0$, έχουμε λύσεις για το z: $z = -(\alpha s)/\gamma$. Για δεύτερη, γραμμικά ανεξάρτητη λύση, θέτουμε $x = 0$ και $y = t$ (αυθαίρετο), οπότε $z = -(\beta t)/\gamma$. Έτσι, ο πυρήνας είναι

$$\ker A = \operatorname{span}((1, 0, -\alpha/\gamma), (0, 1, -\beta/\gamma)).$$

Για να δούμε ότι η παραπάνω δράση δεν είναι μοναδική, θεωρούμε *δεύτερο τρόπο*[8] να δράσει ο ΔΧ $\mathbf{R}^2$ στο επίπεδο $\mathcal{P}$:

$$(x, y, z) \nrightarrow \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = (x + s\beta, y - s\alpha + t\gamma, z - t\beta)\,.$$

Εάν το σημείο (x, y, z) ανήκει στο $\mathcal{P}$, επαληθεύεται ότι και το νέο σημείο ανήκει στο επίπεδο:

$$\alpha(x + s\beta) + \beta(y - s\alpha + t\gamma) + \gamma(z - t\beta) = \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta.$$

3.4 Αφινικές απεικονίσεις

Τα πράγματα είναι πολύ απλά: ακριβώς όπως θεωρήσαμε φυσικό να ορίσουμε **γραμμικές** απεικονίσεις για διανυσματικούς χώρους ως συναρτήσεις που ¨διατηρούν¨ τους *γραμμικούς συνδυασμούς*, έτσι και για αφινικούς χώρους, θα ξεχωρίσουμε ως ειδικές τις απεικονίσεις που διατηρούν τους *αφινικούς* συνδυασμούς —και θα τις ονομάσουμε **αφινικές απεικονίσεις**!

[8]Εδώ υποθέσαμε ότι οι συντελεστές α, β, γ είναι όλοι μη-μηδενικοί. Προσαρμόζεται βέβαια και σε περίπτωση που έχουμε κάποιον μηδενικό συντελεστή.