



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## Κλασική Διαφορική Γεωμετρία Ι

Δεύτερη Πρόοδος – 17 Ιανουαρίου 2017

Διάρκεια εξέτασης 50 λεπτά

Όνομα _____
A.M. _____

Θέμα	1	2	3	Σύνολο
Μονάδες	4	3	4	11
Βαθμός				

1. Με χρήση του αναπτύγματος Taylor της κανονικής παραμέτρησης επιφάνειας  $\Sigma$ ,  $\mathbf{r}(u, v)$ :

(α) Δώστε την γραμμική προσέγγιση της επιφάνειας σε σημείο της  $\mathbf{r} \in \Sigma$ .

(β) Ορίστε τον πίνακα της δεύτερης θεμελιώδους μορφής  $P(u, v)$  και δώστε την γεωμετρική ερμηνεία του.

(γ) Τέλος, δείξτε ότι εάν η επιφάνεια είναι γράφημα συνάρτησης  $z = f(x, y)$  με  $f(0, 0) = 0$  και  $f_x, f_y$  μηδενικές στο  $(0, 0)$ , τότε ο  $P(0, 0)$  είναι ο εσιανός πίνακας της  $f$  στο σημείο  $(0, 0)$ .

(4)

2. Δώστε επιφάνεια  $\Sigma$  τέτοια ώστε σε κάποιο σημείο της  $\mathbf{r}$  οι πρωτεύουσες καμπυλότητες είναι  $\kappa_1 = 2$  και  $\kappa_2 = -1$ . Βρείτε τις ασυμπτωτικές κατευθύνσεις στο σημείο  $\mathbf{r}$ , καθώς και την καμπυλότητα Gauss και μέση καμπυλότητα.

Δείξτε ότι υπάρχει γειτονιά του σημείου  $\mathbf{r}$  στην επιφάνεια που αποτελείται από υπερβολικά σημεία.

(3)

3. Δώστε τον ορισμό της απεικόνισης Gauss. Ποιές είναι οι εικόνες\* της απεικόνισης αυτής για έναν ορθό κύλινδρο (με κυκλική τομή) και για ένα ελλειψοειδές;

Για την σαγματική επιφάνεια  $\Sigma = \text{graph}(z = xy)$ , δείξτε ότι η εικόνα της απεικόνισης Gauss είναι το άνω ημισφαίριο  $z > 0$  της  $S^2$ .

[\* **Εικόνα** μιάς συνάρτησης  $h : X \rightarrow Y$  εννοούμε το σύνολο των τιμών της,  $h(X) \subset Y$ .]

(4)