Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων
Χειμερινό Εξάμηνο 2015-2016

Γεωμετρικη Θεωρια Ελεγχου
Τελική Εργασία

1. (α΄) Το σύνολο των $n \times n$ αντιστρέψιμων πινάκων με πραγματικά στοιχεία αποτελεί υποπολλαπλότητα του συνόλου όλων των πινάκων. Γιατί, και τί διάσταση έχει; (Συμβολίζεται με $GL(n, \mathbf{R})$.)

   Θεωρούμε το υποσύνολό του $GL(n, \mathbf{R})$ των ορθογώνιων πινάκων, $O(n, \mathbf{R})$, δηλαδή πινάκων με $A^T A = I_n$. Δείξτε ότι είναι *συμπαγής* υποπολλαπλότητα της $GL(n, \mathbf{R})$. Είναι συνεκτική ή όχι;

   (β΄) Δώστε δομή πολλαπλότητας στον προβολικό χώρο $\mathbf{R}P^n$ (του συνόλου των ευθειών στο $\mathbf{R}^{n+1}$). Πώς μπορούμε να ορίσουμε διανυσματικό πεδίο στον χώρο αυτό; Δώστε ένα παράδειγμα Δ.Π. στον $\mathbf{R}P^2$.

2. (α΄) Δείξτε ότι εάν δύο τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M^n$ αντιμετατίθενται, $AB = BA$, τότε $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$, για κάθε $t \in \mathbf{R}$.

   (β΄) Δείξτε ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας A είναι όμοιος με το άθροισμα πινάκων S και N, όπου S είναι διαγώνιος και N είναι μηδενοδύναμος πίνακας (Υπόδειξη: προκύπτει από τη μορφή Jordan). Επομένως, δείξτε ότι η εκθετική συνάρτηση του A είναι όμοια με την $e^{St}e^{Nt}$ και δώστε τη γενική μορφή των δύο αυτών εκθετικών συναρτήσεων και επομένως της e^{At}.

3. Γράψτε προσεκτικά την απόδειξη του θεωρήματος του Frobenius, βασισμένη στον τρόπο που δώσαμε στο μάθημα.

4. *Επιχειρήματα γενικότητας* [δηλαδή θα υποθέτετε, κάθε φορά όπου χρειάζεται, ότι η τιμή της συνάρτησης που θεωρείτε είναι *κανονική*. Οι διατυπώσεις περιλαμβάνουν λοιπόν εκφράσεις όπως "γενικά", "τυπικά" κλπ με ταυτόσημη ερμηνεία.]

   (α΄) Τί σύνολο είναι, γενικά, το σύνολο των σημείων όπου δύο τυπικά διανυσματικά πεδία στο χώρο $\mathbf{R}^3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα;

   (β΄) Τί είναι, γενικά, το υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$ όπου τρία γενικά διανυσματικά πεδία είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

   (γ΄) Τί μπορείτε να πείτε για το σύνολο του $\mathbf{R}^3$ σημείων όπου το ανάπτυγμα τεσσάρων γενικών Δ.Π. είναι όλος ο εφαπτόμενος χώρος;

   (δ΄) Εφαρμόστε τα παραπάνω για την περίπτωση όπου ξεκινάμε με δύο Δ.Π. $X, Y \in \mathcal{X}^\infty(\mathbf{R}^3)$, το τρίτο Δ.Π. είναι η αγκύλη τους $[X, Y]$ και το τέταρτο κάποια επαναλαμβανόμενη αγκύλη.

   (ε΄) Τέλος, βρείτε συγκεκριμένα Δ.Π. για τα οποία ισχύουν όλα αυτά που ισχυριστήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

5. Ισχυρισμός: η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας στο 0 του βαθμωτού συστήματος
$$\dot{x} = x^k + O(k+1)$$
με $k \geq 1$ κάποιον ακέραιο και $O(k+1)$ όρους βαθμού μεγαλύτερου του k εξαρτάται μόνο από τον εκθέτη k. Αληθεύει ή όχι, και γιατί;

6. (α') Δίνονται Δ.Π. στο επίπεδο: $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = f(x)\frac{\partial}{\partial y}$, όπου η συνάρτηση f είναι C^∞ και είναι μηδενική για $x \leq 0$ και $f(x) > 0$ και γνήσια αύξουσα για $x > 0$. Δώστε μιά τέτοια συνάρτηση. Περιγράψτε το *προσβάσιμο σύνολο* $\mathcal{R}(T)$ από το αρχικό σημείο $(-1, 0)$ εάν έχουμε διαθέσιμα μόνο τα Δ.Π. X και Y σε θετικό χρόνο.

   (β') Υπολογίστε την άλγεβρα Lie ελεγξιμότητας του συστήματος. Εξηγήστε πώς συμβιβάζονται όλα τα παραπάνω με το θεώρημα των Sussman-Stefan;

7. Θεωρούμε το σύστημα ελέγχου στο επίπεδο, όπου είναι διαθέσιμα δύο *σταθερά* ΔΠ $X = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}$ και $Y = 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ και επιτρέπεται να προχωρούμε με το ένα ή το άλλο ΔΠ, *ή με τα αντίστροφά τους*, δηλαδή μόνο με τις ροές ϕ_X και ϕ_Y των X και Y.

   (α') Δείξτε ότι το *προσβάσιμο σύνολο* $\mathcal{R}(\mathbf{0}, T)$ των σημείων που μπορούμε να φτάσουμε σε χρόνο $\leq T$ από το αρχικό σημείο $\mathbf{0}$ είναι το $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : ||B\mathbf{x}||_1 \leq c\}$, όπου $||\mathbf{x}||_1 = |x| + |y|$ είναι η 1-νόρμα και B κατάλληλος 2×2 πίνακας. Βρείτε τον B και τη σταθερά c.

   (β') Εάν τώρα περιορίσουμε τον χώρο κατάστασης στο κλειστό τετράγωνο με κέντρο το 0 και πλάτος 2 (δεν επιτρέπεται να βγούμε από αυτόν), δείξτε ότι κάθε σημείο του εσωτερικού του είναι προσβάσιμο, αλλά για κάποια σημεία στο σύνορο, δεν μπορούμε να φτάσουμε με πεπερασμένο αριθμό αλλαγών ροής. Ποιά είναι τα σημεία αυτά;

8. Εξετάστε το ακόλουθο πρόβλημα: δίνεται γραμμικό σύστημα $\dot{x} = Ax$ στο $\mathbf{R}^n$, με το 0 ασυμπτωτικά ευσταθές. Η απλούστερη μορφή υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov για το 0 είναι
$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Q x,$$
με $Q = Q^T > 0$ (θετικά ορισμένο, συμμετρικό.) Γιατί;

   Δείξτε ότι πάντα υπάρχει τέτοιος Q και μάλιστα με $\frac{dV}{dt} = -x^T P x$, με P επίσης θετικά ορισμένο συμμετρικό πίνακα.

   Δώστε ένα (μη-διαγώνιο!) παράδειγμα στο $\mathbf{R}^3$.

9. *Χαμιλτονιανά συστήματα και σκεδασμός (dissipation) I*

   (α') Με τη γραφική μέθοδο δώστε το πορτρέτο κίνησης στο επίπεδο του χαμιλτονιανού συστήματος με χαμιλτονιανή $H(x, p) = \frac{1}{2}p^2 + U(x)$, όπου η δυναμική ενέργεια είναι $U(x) = x(x-1)(2-x)$.

   (β') Εισάγουμε τώρα απώλειες ή σκεδασμό, προσθέτοντας τον όρο $-\alpha p$ στην εξίσωση για το $\dot{p}$ (με $\alpha > 0$ μικρό.) Δείξτε ότι έχουμε ένα ασυμπτ. ευσταθές Σ.Ι. και βρείτε συνάρτηση Lyapunov με βάση τη συνολική ενέργεια H. Δώστε σχηματικά το πορτρέτο κίνησης και εξηγήστε τί γίνεται εάν εξέλθουμε από το πεδίο έλξης (region of attraction) του σημείου αυτού.

10. *Χαμιλτονιανά συστήματα και σκεδασμός (dissipation) II*

(α΄) Θεωρούμε χαμιλτονιανό σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή με χαμιλτονιανή

$$H(x, y, p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + U(x, y).$$

Υποθέτουμε ότι το δυναμικό U είναι λεία συνάρτηση με έναν πεπερασμένο αριθμό κρίσιμων σημείων, όλα μη-εκφυλισμένα. Οι χαμιλτονιανές εξισώσεις είναι

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p},\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial q},\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x},\ \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Βρείτε όλα τα σημεία ισορροπίας και εξηγήστε τη σχέση τους με τα κρίσιμα σημεία του δυναμικού.

(β΄) Δώστε τη γραμμικοποίηση του συστήματος αυτού σε Σ.Ι. Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα της γραμμικοποίησης έχουν την συμμετρία: εάν λ είναι ιδιοτιμή, τότε και $-\lambda$ είναι ιδιοτιμή. Τα μη-εκφυλισμένα κρίσιμα σημεία του δυναμικού U μπορεί να είναι τοπικά ελάχιστα, τοπικά μέγιστα ή σάγματα (γιατί μόνο αυτά;) Τί σημεία ισορροπίας δίνει ο κάθε τύπος;

(γ΄) Εισάγουμε τώρα σκεδασμό, προσθέτοντας όρους στις δύο τελευταίες εξισώσεις ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = -D \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{bmatrix},$$

όπου $D = D^T > 0$ (θετικά ορισμένος 2×2 πίνακας.) Με χρήση κατάλληλης συνάρτησης Lyapunov, δείξτε ότι κάθε ελάχιστο της U δίνει ασυμπτ. ευσταθές Σ.Ι.

ΕΚ, 22-2-16