Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων

Κλασικη Διαφορικη Γεωμετρια

Δεύτερη Εργασία: Επιφάνειες Ι

1. Η συνάρτηση $z = x^2 - y^2$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, (όπως όλες οι λείες συναρτήσεις) δίνει κανονική παραμέτρηση επιφάνειας και το γράφημα της είναι η σαγματική επιφάνεια. Δώστε το σχήμα. Θεωρούμε τώρα παραμετρήσεις:

   (α΄) Για $(u, v) \in \mathbf{R}^2$,
   $$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} u + v \\ u - v \\ 4uv \end{bmatrix}.$$

   (β΄) Για $(u, v) \in \mathbf{R}^2 - \{u = 0\}$,
   $$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} u \cosh(v) \\ u \sinh(v) \\ u^2 \end{bmatrix}.$$

   Δείξτε ότι είναι και οι δύο κανονικές.

   Θεωρώντας τις δύο πρώτες συναρτήσεις, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, κάθε μίας ώς απεικονίσεις από υποσύνολο του επιπέδου στο επίπεδο, δείξτε ότι έχουμε διαφορομορφισμό από το κάθε πεδίο ορισμού στην εικόνα του (δηλαδή αλλαγή συντεταγμένων).

   Δείξτε ότι και οι δύο δίνουν παραμετρήσεις της σαγματικής επιφάνειας και δώστε, σε κάθε περίπτωση, το τμήμα του γραφήματος που καλύπτουν.

2. **Ελλειψοειδές:** Θεωρούμε γενικό ελλειψοειδές με εξίσωση
   $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, \ a > b > c > 0.$$

   Επαληθεύστε ότι επιτρέπει παραμέτρηση
   $$\mathbf{r}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} a \sin\theta \cos\phi \\ b \sin\theta \sin\phi \\ c \cos\theta \end{bmatrix}, \ (\theta, \phi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi).$$

   Υπολογίστε τα εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία $\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\phi$ και το κάθετο πεδίο $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi$. Είναι τα $\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\phi$, και επομένως οι μεσημβρινοί και παράλληλοι του ελλειψοειδούς κάθετοι μεταξύ τους; Σε ποιά σημεία είναι κάθετα;

   Επαληθεύστε ότι το πεδίο κλίσης της συνάρτησης $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2$ στα σημεία του ελλειψοειδούς (δηλαδή για $f(x, y, z) = 1$) είναι παράλληλο στο πεδίο $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi$. Μέσω της κλίσης, δείξτε ότι για κάθε $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία της επιφάνειας με εφαπτόμενο επίπεδο κάθετο στο $\mathbf{v}$.

3. **Ευθειογενείς επιφάνειες:** Θεωρούμε παραμετρήσεις της μορφής
   $$\mathbf{r}(t, u) = \mathbf{c}(t) + u\mathbf{v}(t),$$

όπου $\mathbf{c}(t)$, $t \in I$ είναι κανονική καμπύλη στο χώρο, $u \in I' \subset \mathbf{R}$ και $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$, $\forall t$. Εδώ I, I' είναι κάποια μη-κενά, *φραγμένα* διαστήματα στο $\mathbf{R}$, με I' της μορφής $(-\delta, \delta)$. Για t σταθερό, είναι προφανές ότι έχουμε παραμέτρηση ευθείας, οπότε έχουμε μιά μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών. Η καμπύλη $\mathbf{c}$ λέγεται **διευθετούσα (directrix)** ή *οδηγός καμπύλη*. Δεν είναι σαφές ότι έχουμε κανονική παραμέτρηση επιφάνειας. Θα μελετήσουμε συνθήκες που να δίνουν κανονικότητα.

(α΄) Το πεδίο $\mathbf{r}_u = \mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$ εξ υποθέσεως. Το πεδίο $\mathbf{r}_t(t,u) = \dot{\mathbf{c}}(t) + u\dot{\mathbf{v}}(t)$ είναι μη-μηδενικό για $u = 0$, καθώς η καμπύλη είναι κανονική. Δείξτε ότι επομένως, εάν για όλα τα t, τα διανύσματα $\dot{\mathbf{c}}(t)$ και $\mathbf{v}(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε έχουμε κανονική παραμέτρηση καμπύλης σε κάποιο υποσύνολο $I \times (-\epsilon, \epsilon)$.

(β΄) Δείξτε ότι η επιλογή $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{c}}(t)$ δίνει ιδιάζοντα σημεία κατά μήκος της καμπύλης, ενώ η επιλογή $\mathbf{v}(t) = \mathbf{n}(t)$ (το κάθετο πεδίο της καμπύλης, που υποθέτουμε μη-μηδενικό παντού) δίνει πάντα επιφάνεια.

4. **Λωρίδα του Möbius:** Είναι παράδειγμα που αναδεικνύει τους κινδύνους του να επιτρέπουμε **κλειστό** διάστημα ορισμού σε παραμέτρηση. Είναι μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια, με την έννοια ότι δεν ορίζεται μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο πάνω της. Η παραμέτρηση που θα δώσουμε είναι παραλλαγή αυτής επιφάνειας εκ περιστροφής.

   Στο επίπεδο xz, έχουμε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα $(x(t), z(t)) = (3, t)$, $t \in (-1, 1)$. Θα εφαρμόσουμε περιστροφή $\mathrm{Rot}_z(\theta)$ αλλά ταυτόχρονα θα περιστρέφουμε πρώτα το τμήμα με τη μισή ταχύτητα της περιστροφής γύρω από τον άξονα x. Εφαρμόζουμε λοιπόν στα σημεία του τμήματος τον γραμμικό μετασχηματισμό $\mathrm{Rot}_z(\theta)\,\mathrm{Rot}_x(\theta/2)$. Βρείτε την παραμέτρηση αυτή, με $(\theta, t) \in (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ και δώστε το γράφημα. Δείξτε ότι έχουμε κανονική παραμέτρηση επιφάνειας.

   Εάν στην παραμέτρηση που βρήκατε επιτρέπαμε τις τιμές $\theta = 0$ και 2π, υπολογίστε τις δύο αυτές εικόνες και δείξτε ότι έχουμε αντιστροφή των σημείων του τμήματος, σε σχέση με την αρχική θέση του. Εάν λοιπόν επιτρέπαμε $\theta \in [0, 2\pi]$ τί πρόβλημα θα παρουσιαζόταν με το μοναδιαίο κάθετο πεδίο;

5. Δείξτε ότι η **κάθετη** ευθεία σε κάθε σημείο *επιφάνειας εκ περιστροφής* ανήκει στο κάθετο επίπεδο που περνά από το σημείο και περιλαμβάνει τον άξονα z. Εάν επιπλέον έχουμε $\dot{z}(t) \neq 0$ στο σημείο, τότε η κάθετη ευθεία τέμνει τον άξονα z.

ΕΚ, 8-12-16