



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Κλασική Διαφορική Γεωμετρία Ι

Πρώτη Πρόοδος, 24 Νοεμβρίου 2016

Διάρκεια εξέτασης 45 λεπτά

Όνομα _____
A.M. _____

Θέμα	1	2	3	Σύνολο
Μονάδες	35	25	40	100
Βαθμός				

1. (α) Δώστε *πέντε* διανύσματα στο χώρο \mathbf{R}^3 τέτοια ώστε κάθε επιλογή τριών από αυτά να δίνει βάση. Δείξτε ότι έχετε βάση για την επιλογή σας. Είναι δυνατόν να υπάρχουν πέντε τέτοια διανύσματα ώστε οι βάσεις που παίρνουμε να είναι όλες ορθοκανονικές;

(β) Δείξτε ότι τα διανύσματα $\mathbf{u} = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta, \cos \theta \sin \phi)$ και $\mathbf{v} = (-\sin \phi, 0, \cos \phi)$ είναι μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους (για οποιοσδήποτε τιμές των θ, ϕ). Βρείτε την *προβολή* του διανύσματος $\mathbf{w} = (3, -1, 2)$ στο ανάπτυγμά τους $\text{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

(35)

2. Δίνεται η συνάρτηση καμπυλότητας επίπεδης καμπύλης $\rho(s)$:

$$\kappa(s) = \frac{2s}{3\pi} - 2, \quad s \in [0, 6\pi].$$

Δώστε προσεκτικά το γράφημα της $\kappa(s)$. Κάνετε πρόχειρο σχήμα της καμπύλης $\rho(s)$ (με προσέγγιση ισομετρίας φυσικά).

Η καμπύλη αυτή είναι C^2 ή όχι; Τέλος, ισχύουν ή όχι οι σχέσεις: $\frac{d\rho}{ds}(0) = -\frac{d\rho}{ds}(3\pi)$ και $\frac{d\rho}{ds}(3\pi) = -\frac{d\rho}{ds}(6\pi)$; Εξηγήστε.

(25)

3. (α) Δώστε την μοναδική λύση των εξισώσεων Frenet-Serret με σταθερή καμπυλότητα $\kappa = 1/3$, μηδενική στρέψη $\sigma = 0$, αρχικό τρίεδρο Frenet το

$$\mathbf{t}(0) = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), \quad \mathbf{n}(0) = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}),$$

$$\mathbf{b}(0) = \mathbf{t}(0) \times \mathbf{n}(0), \text{ και με } \rho(0) = (1, 2, 0).$$

(β) Η έλικα $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t, vt)$ έχει σταθερή καμπυλότητα $\kappa = \frac{R}{R^2+v^2}$ και στρέψη $\sigma = \frac{v}{R^2+v^2}$ (όπου $R > 0, v \neq 0$). Υπάρχουν άλλες καμπύλες με τα ίδια κ και σ ;

Τέλος, αν $\kappa = 1$ και $\sigma = 1$, βρείτε την ακτίνα του κυλίνδρου R και την κάθετη ταχύτητα v .

(40)