Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Κλασικη Διαφορικη Γεωμετρια Ι

Πρώτη Εργασία

Οκτώβριος-Νοέμβριος 2016

Προαπαιτούμενα

Τα σημεία του διανυσματικού χώρου $\mathbf{R}^3$ είναι τριάδες (x, y, z). Εάν η επιλογή βάσης είναι η συνηθισμένη, δηλαδή $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ και $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, τότε γράφουμε για σημείο $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

ως διάνυσμα στήλης — αλλά προσοχή: εάν επιλέξουμε διαφορετική βάση, τότε αλλάζει και το διάνυσμα. Έτσι, αν $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ είναι βάση, τότε το ίδιο σημείο είναι

$$\mathbf{r} = u\mathbf{b}_1 + v\mathbf{b}_2 + w\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\mathbf{b}_1 = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -3, 1)$ και $\mathbf{b}_3 = (2, 2, -2)$ δίνουν βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbf{R}^3$. Έχει τον ίδιο ή αντίθετο προσανατολισμό με αυτόν της διατεταγμένης συνήθους βάσης $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$; Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{v} = (4, 5, -3)$ ως προς τη βάση αυτή.

2. **Κινούμενες βάσεις:** Έστω ότι έχουμε μία C^1 απεικόνιση $f : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, με $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ ανοικτά μηκενά υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$, η οποία είναι 1:1, επί και με C^1 αντίστροφη $f^{-1} : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$. Η Ιακωβιανή παράγωγος $Df(\mathbf{x})$ σε κάθε σημείο του $\mathcal{D}$ είναι ο $n \times n$ πίνακας των παραγώγων πρώτης τάξης. Καθώς έχουμε $f^{-1}f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, παραγωγίζοντας, έχουμε ότι ο Ιακωβιανός πίνακας είναι *αντιστρέψιμος*, με αντίστροφο τον $(DF(\mathbf{x}))^{-1} = Df^{-1}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$, όπου $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Σε μία διάσταση, αυτό δίνει τη γνωστή σχέση μεταξύ της παραγώγου συνάρτησης και της αντιστρόφου της $\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = 1/\frac{df}{dx}(x_0)$ (με $y_0 = f(x_0)$).

   Δείξτε ότι σε κάθε σημείο του συνόλου $\mathcal{E}$ ορίζεται διατεταγμένη βάση του $\mathbf{R}^n$ ως οι n στήλες του Ιακωβιανού πίνακα. Καθώς έχουμε βάση σε κάθε σημείο και αυτή μεταβάλλεται γενικά, λέμε ότι έχουμε *κινούμενη βάση* του $\mathbf{R}^n$.

   Εφαρμόστε την παραπάνω διαδικασία κια βρείτε την κινούμενη βάση που παίρνουμε από τον ορισμό πολικών συντεταγμένων (r, θ) στο επίπεδο (χρειάζεται προσοχή στον ορισμό του *πεδίου ορισμού* τους):

   $$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

   Κάνετε σχήμα με ενδεικτικά σημεία του επιπέδου και τις αντίστοιχες βάσεις.

Στον ΔΧ $\mathbf{R}^3$ υπάρχουν πολλές επιλογές *εσωτερικού γινομένου*. Το *κανονικό* εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ γράφεται $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ και είναι το γνωστό

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Το γενικό εσωτερικό γινόμενο το γράφουμε με αγκύλες: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

3. (α΄) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3y_1y_2 + 2y_1z_2 + 2z_1y_2 + 5z_1z_2$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbf{R}^3$.

(β΄) Δώστε τη συνάρτηση μέτρου που δίνει το γινόμενο αυτό. Βρείτε το μέτρο του διανύσματος $(3, 3, -2)$ καθώς και την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο διάνυσμα αυτό, ως προς τη συνάρτηση μέτρου που βρήκατε.

4. (α΄) Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

όπου $a, b, c \in \mathbf{R}$ και δείξτε επομένως ότι για a, b, c διακριτές τιμές, τα τρία διανύσματα σειράς αποτελούν βάση του $\mathbf{R}^3$.

(β΄) Δείξτε ότι τα διανύσματα $\mathbf{b}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{b}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 2, 4)$ δίνουν βάση του $\mathbf{R}^3$. Εφαρμόστε τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt στην διατεταγμένη βάση $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ και κατόπιν την ίδια μέθοδο στη βάση με διάταξη $(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3)$.

Τί παρατηρείτε και γιατί; Δώστε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο ανάπτυγμα $\mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$.

Καμπύλες στο χώρο και στο επίπεδο

6. Δείξτε ότι εάν $h_1 : (a, b) \to \mathbf{R}$ και $h_2 : (a, b) \to \mathbf{R}$ είναι C^2 συναρτήσεις στο μη-κενό διάστημα $(a, b) \subset \mathbf{R}$, τότε η παραμέτρηση

$$(a, b) \to \mathbf{R}^3 : x \mapsto \mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + h_1(x)\,\mathbf{j} + h_2(x)\,\mathbf{k}$$

δίνει κανονική καμπύλη. Εξηγήστε γιατί κάθε επίπεδο $x = c$, για $c \in (a, b)$, τέμνει την καμπύλη αυτή σε μοναδικό σημείο.

Δείξτε ότι, αντίστροφα, εάν κάθε επίπεδο $x =$σταθ. τέμνει κανονική καμπύλη γ σε το πολύ ένα σημείο και την τέμνει εγκάρσια, τότε μπορεί να ορίσουμε συναρτήσεις h_1, h_2 όπως παραπάνω, έτσι ώστε η καμπύλη να επιδέχεται παραμέτρηση μέσω τμήματος του άξονα x, όπως μόλις ορίσαμε.

7. Θα μελετήσουμε πότε ορίζεται καμπύλη με τον πιό παραδοσιακό τρόπο ως η τομή δύο ¨επιφανειών¨. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο εξισώσεις για σημεία του $\mathbf{R}^3$:

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0.$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι το σύνολο των ¨λύσεων¨ των εξισώσεων αυτών είναι μη-κενό.

Θεωρούμε τον ιακωβιανό 2×3 πίνακα των πρώτων παραγώγων σε κάθε σημείο του συνόλου αυτού:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι εάν η ορίζουσα ενός 2×2 υπο-πίνακα (π.χ. των δύο πρώτων στηλών) είναι μη-μηδενική στο σημείο, τότε ορίζονται συναρτήσεις g_1, g_2 σε κάποιο διάστημα τέτοιες ώστε η παραμέτρηση π.χ. $z \mapsto (g_1(z), g_2(z), z)$ δίνει καμπύλη στο σύνολο λύσεων, δηλαδή τοπικά η τομή των δύο επιφανειών που ορίζουν οι εξισώσεις είναι καμπύλη. Εξηγήστε γιατί η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων κλίσης σε κάθε σημείο τομής. Βρείτε εξισώσεις για το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας της καμπύλης αυτής.

8. Δίνεται *παραβολή* στο επίπεδο $y = ax^2$, $a \neq 0$. Το γράφημά της είναι κανονική καμπύλη. Βρείτε τη συνάρτηση καμπυλότητας $\kappa(x)$. Δείξτε ότι η εφαπτόμενη ή προσεγγιστική παραβολή για $x = 0$ ταυτίζεται με την αρχική παραβολή και βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης προβολής σε γενικό σημείο. Για την τιμή $a = 1$, βρείτε τον εφαπτόμενο κύκλο στα σημεία $x = 0$ και $x = 1$ και κάνετε τα σχήματα. Τέλος, βρείτε όλα τα σημεία τομής του κύκλου για $x = 1$ με την αρχική καμπύλη/παραβολή.

9. Δώστε κανονικές παραμετρήσεις που να καλύπτουν την *έλλειψη* στο επίπεδο

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

Βρείτε τη συνάρτηση καμπυλότητας και τα σημεία όπου έχει μέγιστες και ελάχιστες τιμές. Βρείτε επίσης, και σχεδιάστε, τους εφαπτόμενους κύκλους στα σημεία αυτά.

10. Θέλουμε να δείξουμε ότι οποιαδήποτε μη κενή τομή σφαίρας με επίπεδο που δεν εφάπτεται στη σφαίρα είναι κύκλος.

(αʹ) Θεωρούμε την καμπύλη που ορίζεται ως η τομή της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ με το επίπεδο $x + y - z = 1$. Βρείτε την καμπύλη προβολής της τομής και δώστε κανονική της παραμέτρηση. Έτσι, ανεβάστε την προβολή αυτή στο χώρο από την εξίσωση τπυ επιπέδου και δώστε την καμπύλη $\mathbf{r}(t)$. Δεν είναι σαφές ότι έχουμε κύκλο στο στάδιο αυτό, αν και γνωρίζουμε ότι έχουμε *επίπεδη* καμπύλη, εκ κατασκευής. Εξηγήστε γιατί, για να αποδείξουμε ότι είναι κύκλος, αρκεί να δείξουμε ότι η καμπυλότητά της είναι σταθερή. Επαληθεύστε ότι αυτό ισχύει για την καμπύλη που βρήκατε.

(βʹ) Η δεύτερη, συντομότερη και πιό ικανοποιητική μέθοδος, βασίζεται στο γεγονός ότι υπάρχει περιστροφή που μετατρέπει οποιοδήποτε επίπεδο σε οριζόντιο επίπεδο $z =$σταθερό. Η τομή οριζόντιου επιπέδου $z = c$ με σφαίρα είναι προφανώς κύκλος, εφόσον $|c| < 1$: $x^2 + y^2 = 1 - c^2$ είναι η προβολή, και ανεβαίνει σε κύκλο στο επίπεδο.

Βρείτε αλλαγή βάσεων που να αντιστοιχεί σε ορθογώνιο μετασχηματισμό και που δίνει επομένως περιστροφή που στέλνει το επίπεδο $x + y - z = 1$ σε επίπεδο $z = c$. Βρείτε το c και επομένως την ακτίνα του κύκλου τομής.

11. Ορίζουμε καμπύλη στο χώρο $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (1 + \cos t)\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}, & 0 \leq t \leq \pi \\ \cos(t - \pi/2)\,\mathbf{j} + (1 + \sin(t - \pi/2))\,\mathbf{k}, & \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Δείξτε ότι έχουμε *συνεκτική* καμπύλη η οποία είναι C^1 αλλά όχι C^2 και κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα. Δώστε τον εφαπτόμενο κύκλο σε κάθε σημείο της καμπύλης όπου είναι C^2.

12. Θεωρούμε την καμπύλη (που έχουμε αναφέρει ότι λέγεται twisted cubic)

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(αʹ) Δείξτε ότι είναι κανονική, υπολογίστε τις συναρτήσεις καμπυλότητας $\kappa(t)$ και στρέψης $\sigma(t)$ και δώστε τα γραφήματά τους. Βρείτε το σημείο μέγιστης καμπυλότητας.

(β΄) Δείξτε ότι το τρίεδρο Frenet στο $t = 0$ συμπίπτει με την διατεταγμένη, ορθοκανονική βάση $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Επομένως, δείξτε ότι η προσεγγιστική παραβολή στο $t = 0$ είναι ακριβώς η παραβολή $y = x^2$ στο οριζόντιο επίπεδο.

(γ΄) Το ανάπτυγμα Taylor της καμπύλης με κέντρο το $t = 0$ συμπίπτει με την αναλυτική μορφή της —γιατί; Θεωρούμε τώρα το ανάπτυγμα Taylor για την καμπύλη ως προς τη φυσική παράμετρο, με κέντρο το $s = 0$, που αντιστοιχεί στο $t = 0$, με όρους μέχρι και κυβικούς:

$$\boldsymbol{\rho}(s) \simeq \boldsymbol{\rho}(0) + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}(0)s + \frac{1}{2}\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{ds^2}(0)s^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\boldsymbol{\rho}}{ds^3}(0)s^3.$$

Βασιζόμενοι στη θεωρία και στους υπολογισμούς που έχετε κάνει, και παρατηρώντας ότι $\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{ds^2} = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, δώστε το κυβικό ανάπτυγμα Taylor για την $\rho(s)$ ως προς την συνήθη βάση, δηλαδή

$$\boldsymbol{\rho}(s) \simeq a(s)\,\mathbf{i} + b(s)\,\mathbf{j} + c(s)\,\mathbf{k}.$$

για κατάλληλα πολυώνυμα $a(s), b(s), c(s)$. Συγκρίνετε τα δύο αναπτύγματα.

ΕΚ, 8-11-16