Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Μαθηματικων

Ομάδα Θεμάτων Α1

Αναλυτική Γεωμετρία Ι

Τελική Εξέταση – 14 Ιουνίου 2016

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

Όνομα _____

Α.Μ. _____

Θέμα	1	2	3	4	5	Σύνολο
Μονάδες	25	25	25	15	20	110
Βαθμός						

1. (α') Δώστε δράση του ΔΧ $\mathbf{R}^2$ στο αφινικό επίπεδο $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 2\}$. Επίσης, δώστε μία αφινική βάση τριών σημείων (a_0, a_1, a_2) και βρείτε τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες του σημείου $(2, -2, 3) \in \mathcal{P}$ ως προς τη βάση αυτή.

   (β') Στον αφινικό χώρο $\mathbf{A}^3$ με δεδομένη την διατεταγμένη αφινική βάση $\mathcal{A} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, γράφουμε τυχαίο σημείο ως

$$a = a_0 + x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3, \text{ όπου } \mathbf{b}_i = a_i - a_0, \ i = 1, 2, 3,$$

   δηλαδή x_1, x_2, x_3 είναι οι αφινικές του συντεταγμένες. Γράφουμε $\mathbf{x}$ το διάνυσμα με τις συντεταγμένες αυτές.
   Βρείτε τον πίνακα C και το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}$ ως προς τη βάση $\mathcal{A}$ για την αλλαγή βάσης $\mathbf{z} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ που παίρνουμε από την *μετάθεση* των σημείων βάσης (a_2, a_3, a_0, a_1).

(25)

2. Δίνονται τα αφινικά επίπεδα

$$\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 3x + 2y + z = 6\} \text{ και } \mathcal{P}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : -x - 2y + 3z = 2\}.$$

   (α') Δώστε αφινικές βάσεις (a_0, a_1, a_2) και (a'_0, a'_1, a'_2) των $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ αντίστοιχα με a_i (αντίστ. a'_i) τα σημεία τομής των επιπέδων με τους τρεις άξονες x, y, z. Επομένως, δώστε και βάσεις της μορφής $(a_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ και $(a'_0, \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2)$ αντίστοιχα.

   (β') Βρείτε την αφινική απεικόνιση $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, ως προς τις παραπάνω βάσεις, που στέλνει το a_0 στο $-a'_0 + 2a'_2$, το a_1 στο $(a'_0 + a'_1 + a'_2)/3$ και το a_2 στο $(a'_1 + a'_2)/2$. Είναι ομαλή (αντιστρέψιμη); Βρείτε την αντίστροφη εικόνα του σημείου $3a'_1 - 2a'_2$.

(25)

3. Θεωρούμε τετραγωνική συνάρτηση στο αφινικό επίπεδο $\mathbf{A}^2$:

$$f(x, y) = ax^2 + 12xy + 9y^2 + 6x - 10y.$$

   (α') Ταξινομήστε τις καμπύλες $f(x, y) = 0$ που προκύπτουν για διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbf{R}$ και δώστε τις αφινικές κανονικές τους μορφές.

(β') Για την τιμή $a = 5$, δώστε την αντίστοιχη ομογενή συνάρτηση $F(X, Y, Z)$ από την οποία, για $Z = 1$ προκύπτει η $f(x, y)$ και αναγνωρίστε την ως τετραγωνική μορφή στο χώρο (πρόσημα των ιδιοτιμών χρειάζονται μόνο).

(25)

4. Θεωρούμε τρία διακριτά "σημεία" του προβολικού χώρου $\mathbf{R}P^1$, δηλαδή τρεις διακριτές ευθείες ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 στο $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ (το επίπεδο μείον το 0). Δείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε ομογενείς συνταταγμένες $[X_1 : X_2]$, $[Y_1 : Y_2]$ και $[Z_1 : Z_2]$ για τις ℓ_i, $i = 1, 2, 3$ έτσι ώστε να έχουμε
$$Z_1 = X_1 + Y_1,\ Z_2 = X_2 + Y_2.$$
Βρείτε τέτοιες συντεταγμένες για τις ευθείες $\ell_1 : -x + 2y = 0$, $\ell_2 : 2x + y = 0$ και $\ell_3 : 5x - 3y = 0$.

(15)

5. Δείξτε ότι η συνάρτηση $q : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$
$$q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = q((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 2x_3y_3$$
ορίζει εσωτερικό γινόμενο $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >_q = q(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ στο ΔΧ $\mathbf{R}^3$. Δώστε τη συνάρτηση μέτρου που ορίζει και περιγράψτε το σύνολο $||\mathbf{u}||_q = 2$ διανυσμάτων σταθερού μέτρου. Τέλος, δώστε την εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται ως το σύνολο των διανυσμάτων που είναι κάθετα, ως προς αυτό το εσωτ. γιν., στο $(1, 1, 1)$.

(20)