



## ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

### Τρίτη Εργασία

1. Δώστε όλους τους χώρους κάλυψης του τόρου  $T^2$  (με προσέγγιση ισοδυναμίας φυσικά) και δώστε κάποιους χώρους κάλυψης του χώρου  $S^2 \vee S^1$  (ένα κοινό σημείο).
2. Αποφασίστε εάν οι παρακάτω απεικονίσεις έχουν ανύψωση στον αντίστοιχο χώρο κάλυψης
  - (α) Η  $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^5$ , για τον καθολικό ΧΚ  $\mathbf{R} \rightarrow S^1$ .
  - (β) Ο εγκλεισμός του  $\mathbf{R}P^2 \rightarrow \mathbf{R}P^3$  για τον ΧΚ  $S^3 \rightarrow \mathbf{R}P^3$ .
3. (α) Δώστε (“με δικά σας λόγια”) την απόδειξη του παρακάτω αποτελέσματος:

**Θεώρημα.** Εάν  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  είναι χώρος κάλυψης, θεωρούμε το διακριτό σύνολο  $p^{-1}(x_0)$ , δηλ. την ίνα πάνω από το  $x_0 \in X$ . Τότε

- i. Η θεμελιώδης ομάδα  $\pi_1(X, x_0)$  έχει μεταβατική δράση πάνω στην ίνα. Πιο αναλυτικά: κάθε στοιχείο της ομάδας, με ανύψωση, δίνει τελικό σημείο στην ίνα και με τον τρόπο αυτό παίρνουμε όλα τα σημεία της ίνας και έχουμε δράση ομάδας.
- ii. Εάν  $\tilde{x}_0$  είναι τυχαίο σημείο της ίνας, τότε τα στοιχεία της  $\pi_1(X, x_0)$  που αφήνουν αναλλοίωτο το  $\tilde{x}_0$  είναι ακριβώς τα στοιχεία της υπο-ομάδας  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ .
- iii. Έχουμε έτσι τελικά ότι

$$\text{card}(p^{-1}(x_0)) = [\pi_1(X, x_0) : p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)].$$

(β) Δείξτε ότι εάν  $\tilde{X} \rightarrow X$  είναι ΧΚ με  $p$  στρώματα, όπου  $p$  πρώτος και επιπλέον ο  $\tilde{X}$  είναι απλά συνεκτικός, τότε  $\pi_1(X) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

4. Θεωρούμε αλυσιδωτό σύμπλοκο  $V_*$  διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης (αντί πεπερ. παραγόμενων αβελιανών ομάδων –το αποτέλεσμα γενικεύεται, αλλά η περίπτωση που δίνουμε είναι πιο απλή και άμεση),

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} \dots \xrightarrow{T_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \longrightarrow 0.$$

Έχουμε δηλαδή  $T_{i+1} \circ T_i = 0$ . Ορίζουμε ως συνθήως ομολογία  $H_i$  σε κάθε  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ως το πηλίκο  $\ker T_i / \text{im } T_{i-1}$ . Δείξτε ότι έχουμε

$$\sum_i (-1)^i \dim H_i(V_*) = \sum_i (-1)^i \dim V_i.$$

5. Εξηγήστε γιατί μπορούμε να “σπάσουμε” κάθε μακρά ακριβή ακολουθία (μ.α.α) σε μία σειρά από βραχείες ακριβείς ακολουθίες (β.α.α.) ως εξής: από την μ.α.α.

$$\dots \xrightarrow{f_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} C_n \xrightarrow{f_n} C_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

έχουμε, για κάθε  $n$ , β.α.α.

$$0 \rightarrow C_{n+1}/\text{im } f_{n+2} \xrightarrow{f_{n+1}} C_n \xrightarrow{f_n} \text{im } f_n \rightarrow 0. \quad (1)$$

Τί μορφή έχουμε αν το σύμπλοκο αρχίζει από το 0:  $0 \rightarrow C_m \rightarrow C_{m-1} \rightarrow \dots$  στο σημείο  $m$ ;

6. Δώστε το υπόλοιπο της απόδειξης ότι βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσιδωτών συμπλόκων δίνει μακρά ακριβή ακολουθία σε ομολογία. (Θεωρούμε δεδομένο τον ορισμό του συνεκτικού ομομορφισμού και χρειάζεται μόνο να δείξετε την ακρίβεια σε κάθε σημείο.)
7. Δείξτε ότι εάν ο υποχώρος  $A$  του  $X$  είναι παραμορφωτική σύμπτυξη του, τότε η σχετική ομολογία  $H_*(X, A) = 0$ .
8. Υπολογίστε την ιδιάζουσα ομολογία  $H_*$  του τόρου  $T^2$  και της φιάλης Klein  $K^2$  από την ακολουθία Mayer-Vietoris. (Για την  $K^2$  πάρετε κάθετη τομή σε δύο συμμετρικά κομμάτια, όπως υποδείξαμε στο μάθημα.)
9. Υπολογίστε τη σχετική ιδιάζουσα ομολογία των ζευγών  $(X, A)$ :
  - (α)  $X = S^n = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ , και
    - i.  $A =$  πεπερ. αριθμός διακριτών σημείων,
    - ii.  $A = S^{n-1}$  ο ισημερινός (δηλ. η σφαίρα  $x_{n+1} = 0$ ).
  - (β)  $X = T^2$ , ο τόρος και  $A =$  πεπερ. αριθμός διακριτών σημείων.
  - (γ)  $X = \Sigma_2$ , επιφάνεια γένους δύο και  $A$  ο κύκλος του παρακάτω σχήματος.

