Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικη Τοπολογια
Δεύτερη Εργασία

1. Έστω $F_2 =< a, b >$ η ελεύθερη ομάδα σε δύο στοιχεία και $F_3 =< u, v, w >$ η ελεύθερη ομάδα σε τρία στοιχεία. Φαίνεται μεγαλύτερη, έτσι δεν είναι; Δείξτε όμως ότι η απεικόνιση $h : F_3 \to F_2$ που στέλνει τους γεννήτορες $u \mapsto ab$, $v \mapsto a^2b^2$ και $w \mapsto a^3b^3$ και επεκτείνεται στις λέξεις με προφανή τρόπο είναι μονομορφισμός. Τί θα λέγατε για την απεικόνιση των u, v, w στα a^2 , b^2 και ab αντίστοιχα;

2. Είδαμε ότι παράσταση της θεμελιώδους ομάδας του προβολικού επιπέδου είναι

$$\pi_1(\mathbf{R}P^2) \simeq < a, b \,|\, abab > .$$

   Δείξτε ότι πρόκειται για την αβελιανή ομάδα $\mathbb{Z}_2$.

   Δώστε γεννήτορα α της ομάδας, δηλαδή βρόχο στο τετράγωνο που ορίζει τον προβολικό χώρο με τις γνωστές ταυτίσεις, τέτοιον ώστε η σύνθεση με τον εαυτό του δίνει βρόχο ομοτοπικό με τον τετριμμένο. Δείξτε σε σχήμα τα βήματα της ομοτοπίας.

3. Θεωρούμε το σύνολο $SO(3)$ των περιστροφών στο χώρο (είναι γνωστό ότι είναι πολλαπλότητα τριών διαστάσεων). Θα το μελετήσουμε από τοπολογική σκοπιά.

   (α΄) Θεωρούμε γνωστό ότι κάθε περιστροφή στο χώρο ορίζεται από έναν άξονα και μία γωνία περιστροφής. Τώρα αντιστοιχίζουμε τα στοιχεία της μπάλας ακτίνας π, $B^3 = \{\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3 : |\mathbf{r}| \leq \pi\}$ με περιστροφές, ως εξής: κάθε σημείο $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ δίνει περιστροφή με άξονα $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ και γωνία $|\mathbf{r}|$. Πρέπει να ταυτίσουμε αντιδιαμετρικά σημεία στην συνοριακή σφαίρα, για να πάρουμε τελικά το $SO(3)$.

   (β΄) Δείξτε ότι το $SO(3)$ είναι δρομοσυνεκτικό. Δείξτε, με χρήση του θεωρήματος Seifert-van Kampen ότι $\pi_1(\mathbf{R}P^3) \simeq \pi_1(\mathbf{R}P^2)$. Επομένως, δείξτε ότι $\pi_1(SO(3)) \simeq \mathbb{Z}_2$ (από τη θεωρία των χώρων κάλυψης, έχει επομένως καθολικό χώρο κάλυψης που δίνει διπλή κάλυψη - λέγεται $Su(2)$).

4. (α΄) Δείξτε ότι αν $r : X \to A$ είναι σύμπτυξη (retraction) και ο X είναι Hausdorff, τότε το υποσύνολο A είναι κλειστό.

   (β΄) Δείξτε ότι εάν έχουμε σύμπτυξη $r : X \to A$ και η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(A) \neq \{1\}$, τότε ο χώρος X δεν είναι συσταλτός.

   (γ΄) Δείξτε ότι ο κύκλος $S^1 \times \{p\}$ είναι σύμπτυξη του τόρου $S^1 \times S^1$ (όπου p σημείο του δεύτερου παράγοντα/κύκλου), αλλά δεν υπάρχει παραμορφωτική σύμπτυξη.

5. Δείξτε ότι ο ισομορφισμός που παίρνουμε για τις θεμελιώδεις ομάδες με την αλλαγή του σημείου βάσης εξαρτάται μόνον από την κλάση ισοδυναμίας του μονοπατιού που συνδέει τα δύο σημεία. Περιγράψτε τί συμβαίνει εάν η θεμελιώδης ομάδα είναι αβελιανή.

   Δώστε παράδειγμα χώρου (με μη-αβελιανή θεμ. ομάδα) και δύο αλλαγές σημείου βάσης με μονοπάτια μη-ομοτοπικά που να δίνουν διαφορετικούς ισομορφισμούς της ομάδας.

6. (α΄) Δώστε παράδειγμα 1:1 συνεχούς συνάρτησης $f : X \to Y$ για την οποία ο ομομορφισμός $f_* = \pi_1(f)$ δεν είναι 1:1.

   (β΄) Δώστε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f : X \to Y$ που είναι επί, για την οποία ο ομομορφισμός $f_* = \pi_1(f)$ δεν είναι επί.

7. Μία ομάδα G λέγεται **τοπολογική ομάδα** εάν έχει δομή τοπολογικού χώρου με τις απεικονίσεις γινομένου και αντιστρόφου να είναι συνεχείς:

$$\mu : G \times G \to G, \quad \iota : G \to G,$$

   όπου $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ και $\iota(g) = g^{-1}$. Θεωρούμε τη θεμελιώδη ομάδα της G με σημείο βάσης τη μονάδα e. Εάν f, g είναι βρόχοι βασισμένοι στο e, ορίζουμε βρόχο γινόμενο $f \cdot g$ μέσω του γινομένου στην G: $(f \cdot g)(t) = f(t)g(t)$, $t \in I$.

   Δείξτε ότι το γινόμενο των f, g στην π_1 είναι στην ίδια κλάση ομοτοπίας με τον παραπάνω βρόχο γινόμενο, $f * g \sim f \cdot g$, αλλά και $f \cdot g \sim g * f$, και επομένως η θεμελιώδης ομάδα της G είναι αβελιανή.

8. Στον τόρο $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, με α, β τους βρόχους

$$\alpha(t) = (e^{2\pi i t}, 1), \quad \beta(t) = (1, e^{2\pi i t}),$$

   δείξτε (με χρήση κατάλληλου διαγράμματος) ότι $\alpha * \beta = \beta * \alpha$.

9. Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου που παίρνουμε από δύο αντίτυπα του τόρου $S^1 \times S^1$ με ταύτιση του ενός κύκλου $S^1 \times \{x_0\}$ στον πρώτο τόρο με τον αντίστοιχο κύκλο $S^1 \times \{x_0\}$ στο δεύτερο τόρο.

ΕΚ, 20-4-16