Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων

# Αναλυτικη Γεωμετρια Ι

## Δεύτερη Εργασία: Αφινικοί Χώροι Ι

*Στην εργασία αυτή, να χρησιμοποιήσετε αποκλειστικά μεθόδους της Αφινικής Γεωμετρίας. Θυμίζουμε τον συμβολισμό για το* ***αφινικό ανάπτυγμα****, το σύνολο όλων των αφινικών συνδυασμών $m$ σημείων χώρου $X^n$,*

$$\mathrm{affspan}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} t_i a_i,\ t_i \in \mathbf{R},\ \sum_{i=1}^{m} t_i = 1 \right\}.$$

*Έτσι, π.χ. σε αφινικό χώρο $X^n$, για $a_0 \neq a_1$ το $\mathrm{affspan}(a_0, a_1) = \ell(a_0, a_1)$, η ευθεία που ορίζουν.*

Στα μαθήματα είδαμε ότι στο χώρο $\mathbf{R}^3$ (με την κανονική του βάση), η γενική μορφή *επιπέδου*, ως αφινικού χώρου δύο διαστάσεων, είναι

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta,$$

με $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Ονομάζουμε *αναλυτική* τη μορφή αυτή, για να τη διακρίνουμε από την *αφινική* και την *παραμετρική* μορφή, $\mathrm{affspan}(a_0, a_1, a_2)$ και $a_0 + \mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ αντίστοιχα.

1. Δείξτε ότι έχουμε διανυσματικό υποχώρο εάν και μόνο εάν $\delta = 0$.

2. Δίνονται τρία επίπεδα στο $\mathbf{R}^3$, με τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\mathcal{P}_1 : -x + z = 3,\ \mathcal{P}_2 : x - 4y + 3z = 9,\ \mathcal{P}_3 : y = -2,$$

   (α') Δώστε από μία δράση του διανυσματικού χώρου $\mathbf{R}^2$ στο επίπεδο.

   (β') Δώστε από μία αφινική βάση της μορφής $(a_0, a_1, a_2)$ και την αντίστοιχη βάση $(a_0, \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2)$.

   (γ') Βρείτε αντιστρέψιμη αφινική απεικόνιση που να στέλνει το $\mathcal{P}_1$ στο $\mathcal{P}_2$ και μία άλλη που να στέλνει το $\mathcal{P}_2$ στο $\mathcal{P}_3$. Δώστε τη σύνθεση των δύο και δείξτε ότι είναι πράγματι απεικόνιση από το $\mathcal{P}_1$ στο $\mathcal{P}_3$. Υπολογίστε την αντίστροφη εικόνα του σημείου $(1, -2, 3) \in \mathcal{P}_3$.

3. Στο $\mathbf{R}^3$, δίνεται το αφινικό επίπεδο $\mathrm{affspan}((2, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 6))$ και η παραμετρική οικογένεια ευθειών

$$\ell_k((2, 0, 1), (0, 1, k)).$$

   Βρείτε, αν υπάρχει, τιμή της σταθεράς $k$ ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στο επίπεδο.

4. Σε αφινικό χώρο $X^3$ με βάση $(a_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, δίνονται τρία αφινικά ανεξάρτητα σημεία $p, q, r$ με αφινικές συντεταγμένες

$$p = (p_1, p_2, p_3),\ q = (q_1, q_2, q_3),\ r = (r_1, r_2, r_3).$$

Δείξτε ότι ένα σημείο $x = (x_1, x_2, x_3)$ του $X^3$ ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα τρία σημεία εάν και μόνο εάν

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Είδαμε ότι στο αφινικό επίπεδο κάθε *τρίγωνο* είναι αφινικά ισοδύναμο με οποιοδήποτε άλλο (ως τρίγωνο εννοούμε το γεωμετρικό σχήμα που ορίζουν τρία αφινικά ανεξάρτητα σημεία. Για έμφαση, λέμε ότι έχουμε *μη-εκφυλισμένο* τρίγωνο).

5. Δείξτε ότι υπάρχουν έξι διαφορετικοί αφινικοί μετασχηματισμοί που στέλνουν το πρώτο τρίγωνο στο δεύτερο.

6. Δείξτε ότι τα τρίγωνα με κορυφές τα σημεία $(1, 2)$ , $(0, 3)$ και $(-2, 0)$ το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(2, 1)$, $(-1, 2)$ και $(-1, -1)$ είναι μη-εκφυλισμένα. Δώστε έναν από τους αφινικούς μετασχηματισμούς που στέλνουν το πρώτο τρίγωνο στο δεύτερο.

7. Θεωρούμε τώρα τετράπλευρα, δηλαδή τέσσερα σημεία, κάθε τρία από τα οποία δεν είναι συνευθειακά. Εάν θεωρήσουμε διατεταγμένη τετράδα σημείων, $(c_0, c_1, c_2, c_3)$, δώστε συνθήκες ώστε το τετράπλευρο να είναι κυρτό, δηλαδή να κείται στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα στα οποία χωρίζει το αφινικό επίπεδο η κάθε πλευρά.

8. Εάν τώρα έχουμε δύο τετράπλευρα, υπάρχει, γενικά, αφινικός μετασχηματισμός που να στέλνει το ένα τετράπλευρο στο άλλο; Εξηγήστε προσεκτικά.

9. Τί γίνεται στην περίπτωση που το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο; Δώστε ένα παράδειγμα.

Συνεχίζουμε θεωρώντας τους διάφορους τρόπων ορισμού *ευθειών σε αφινικό χώρο.*

10. Πολλές φορές δίνεται *ευθεία* σε αφινικό χώρο $X^3$ μέσω δύο εξισώσεων, δηλαδή λέμε παραδείγματος χάρην, *έστω η ευθεία*

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2,\ 2x_1 - x_3 = 1.$$

Εξηγήστε την ερμηνεία της διατύπωσης αυτής, συνδέστε την με τον ορισμό μέσω αφινικού αναπτύγματος και βρείτε την ευθεία του παραδείγματος.

11. Ένας άλλος παραδοσιακός τρόπος να δοθεί ευθεία σε χώρο $\mathbf{A}^3$ είναι ως το σύνολο που ικανοποιεί

$$\frac{x_1 - c_1}{\alpha} = \frac{x_2 - c_2}{\beta} = \frac{x_3 - c_3}{\gamma}.$$

Εξετάστε κριτικά τον τρόπο αυτό (ισχύει γενικά;) και συνδέστε τον με τους άλλους τρόπους ορισμού ευθείας σε χώρο, τον παραμετρικό και τον αναλυτικό.

12. Ενθαρρυμένοι από τα παραπάνω, κάνουμε απόπειρα να ορίσουμε ευθεία σε χώρο *τεσσάρων* διαστάσεων μέσω *τριών* εξισώσεων. Εξηγήστε τις αδυναμίες του ορισμού αυτού.

13. Οι εξισώσεις στο $\mathbf{A}^4$:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 3. \end{aligned}$$

δίνουν ορισμό ευθείας ή όχι;

Με ποιόν τρόπο μπορούμε να αλλάξουμε λίγο ένα μόνο στοιχείο έτσι ώστε να έχουμε ευθεία;

ΕΚ, 17-4-16