Κεφάλαιο 2

Επισκόπηση Γραμμικής Άλγεβρας

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε ένα "περίγραμμα" των βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων της Γραμμικής Άλγεβρας. Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης έχει ολοκληρώσει τη μελέτη του αντικειμένου αυτού σε προηγούμενο μάθημα.

2.1 Διανυσματικοί χώροι

Ένας *διανυσματικός χώρος* είναι ένα σύνολο όπου ορίζεται μία πράξη, η πρόσθεση, η οποία δίνει στο σύνολο τη δομή αβελιανής ομάδας και, επιπλέον, ορίζεται γινόμενο με στοιχεία ενός σώματος k (συνήθως του $\mathbf{R}$ ή του $\mathbf{C}$) το οποίο ικανοποιεί κάποιες "*λογικές συνθήκες συμβατότητας*" με την πρόσθεση.

Πιό αναλυτικά, έχουμε στο σύνολο V πράξη $V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u + v$ με $v + u = u + v$, $(u + v) + w = u + (v + w)$. Υπάρχει μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}$, με $u + \mathbf{0} = u$ και για κάθε v στον V, αντίθετό του στοιχείο, $-u$, με $u + (-u) = \mathbf{0}$. Οι αριθμοί $\alpha, \beta, \ldots \in k$ δίνουν γινόμενο, $k \times V \to V$, $(\alpha, u) \mapsto ku$ με ιδιότητες

$$\beta(\alpha u) = (\beta\alpha)u,\ (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u,\ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v,\ \ 1u = u,\ 0u = \mathbf{0}.$$

Τα στοιχεία του V λέγονται *διανύσματα* και το μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}$ παίζει τον ιδιαίτερο ρόλο της αρχής ή αφετηρίας του διανυσματικού χώρου V. Υπάρχει πάντοτε σε κάθε Δ.Χ., ακόμα και τον τετριμμένο χώρο $\{\mathbf{0}\}$!

Κοντολογίς, σε Δ.Χ. V ορίζεται η έννοια του **γραμμικού συνδυασμού** διανυσμάτων, $\alpha u + \beta v$, όπου $u, v \in V$ και α, β αυθαίρετα στοιχεία του σώματος k (οπότε επιτρέπεται και ο τετριμμένος συνδυασμός που δίνει το $\mathbf{0}$.)

Παραδείγματα: Πρώτα δίνεται συνήθως το προφανές: το καρτεσιανό γινόμενο k^n (κυρίως $\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$) με διανύσματα n-άδες αριθμών, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και προφανή πρόσθεση και γίνόμενο:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Για να πειστούμε ότι υπάρχουν και άλλης μορφής Δ.Χ., δίνεται το σύνολο $\mathcal{P}^n$ των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n (για κάποιο $n \geq 0$), με την συνήθη πρόσθεση πολυωνύμων, $p(x) + q(x)$ και προφανές γινόμενο $\alpha p(x)$. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι αν επιμέναμε σε σταθερού βαθμού πολυώνυμα, δεν θα είχαμε Δ.Χ., καθώς π.χ. ο γραμμικός συνδυασμός

$$(3x^3 - 4x^2 + 11x - 12) + (-3)(x^3 + 2x) = -4x^2 + 5x - 12$$

δίνει πολυώνυμο βαθμού δύο, όχι τρία.

Η αντιστοίχιση $\mathcal{P}^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ που στέλνει το πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ στο διάνυσμα $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ δείχνει ότι δεν έχουμε ουσιαστικά ξεφύγει από το Δ.Χ.–καρτεσιανό γινόμενο.

Το ίδιο συμβαίνει και αν θεωρήσουμε το σύνολο $\mathcal{M}^{m\times n}$ όλων των $m \times n$ πινάκων A με στοιχεία $a_{ij} \in k$: η πρόσθεση δύο πινάκων ίδιων διαστάσεων είναι καλά ορισμένη και έχουμε το γινόμενο βA, με στοιχεία βa_{ij}. Βλέπουμε εύκολα ότι έχουμε πάλι ουσιαστικά χώρο καρτεσιανό γινόμενο, διάστασης mn (εννοούμε φυσικά ότι η αντιστοίχιση δίνει ισομορφισμό Δ.Χ.). Στο σημείο αυτό αρχίζουμε να υποπτευόμαστε ότι ίσως οι Δ.Χ. k^n είναι οι μόνοι που υπάρχουν. Αυτό είναι αληθές (για τη διατύπωσή του βέβαια θα χρειαστούμε επιπρόσθετες έννοιες –γραμμικής ανεξαρτησίας, βάσης κλπ), αλλά ισχύει μόνο για Δ.Χ. πεπερασμένης διάστασης (ακριβή ορισμό της οποίας θα δώσουμε σύντομα).

Διανυσματικοί χώροι μη-πεπερασμένης διάστασης είναι, για παράδειγμα, οι χώροι: $k[x]$ (ή $\mathcal{P}$) όλων των πολυωνύμων σε μία μεταβλητή και χώροι συναρτήσεων. Τέτοιοι είναι οι $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ (συνεχείς συναρτήσεις), $C^k(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ (συναρτήσεις k φορές συνεχώς παραγωγίσιμες), $C^0(S^1, \mathbf{R})$ (περιοδικές συναρτήσεις) κ.ο.κ. Βεβαιωθείτε ότι "βλέπετε" γιατί έχουμε Δ.Χ. σε κάθε περίπτωση: η πρόσθεση και γινόμενο δίνονται *ανά σημείο:* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Στα παραδείγματα αυτά δεν μπορούμε (χωρίς επιπλέον ¨ανάλυση¨) να ισχυριστούμε ότι έχουμε ¨ουσιαστικά¨ κάποιας μορφής καρτεσιανό γινόμενο k^∞. Όπως έγινε αντιληπτό, έχουμε περάσει στα χωράφια της *Ανάλυσης* και θα αφήσουμε την μελέτη τους στην περιοχή αυτή. Εμείς περιοριζόμαστε στη Γεωμετρία και σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Χρειαζόμαστε λοιπόν επειγόντως ορισμό *διάστασης* ενός διανυσματικού χώρου! Προηγείται όμως η κρίσιμη έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας συνόλου διανυσμάτων.

Ο επίσημος ορισμός (που καλό είναι να γνωρίζετε) είναι ο εξής: ένα σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m\}$ διανυσμάτων του V (με $m \geq 1$) είναι **γραμμικά εξαρτημένο** εάν υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq \mathbf{0}$ (του k^m) με τον γραμμικό συνδυασμό που παράγει να δίνει το μηδενικό διάνυσμα:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = \mathbf{0} \in V.$$

Εάν ακόμα και ένα από τα διανύσματα που μας δίνονται είναι μηδενικό, έχουμε αυτόματα γραμμική εξάρτηση (επιλέγουμε $\alpha_i = 1$ για τον δείκτη του

μηδενικού διανύσματος και $\alpha_j = 0$ για τους υπόλοιπους συντελεστές.) Επίσης προφανές είναι ότι π.χ. τα $\{u, v, u+v\}$, είναι γραμμικά εξαρτημένα: $(u+v) - u - v = \mathbf{0}$.

Ορισμός 2.1. Το σύνολο διανυσμάτων $\{v_1, \ldots, v_m\}$ του χώρου V είναι **γραμμικά ανεξάρτητο** (ή τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα) εάν δεν υπάρχει σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ τους, δηλαδή, ισοδύναμα, εάν κάθε συνδυασμός τους που δίνει το $\mathbf{0}$,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = \mathbf{0} \in V,$$

συνεπάγεται ότι όλα τα α_i είναι ίσα με μηδέν.

Το κλασικό παράδειγμα είναι τα διανύσματα $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ του k^n, με μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο στη θέση i, καθώς γραμμικός συνδυασμός δίνει άμεσα

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \mathbf{0}.$$

Χρήσιμος είναι ο ορισμός του **αναπτύγματος** συνόλου διανυσμάτων:

$$\mathrm{span}(v_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}) = \{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j v_j \in V,\ \alpha_j \in k\}$$

όλων των γραμμικών συνδυασμών τους (με πεπερασμένο πλήθος όρων). Εδώ το σύνολο δείκτη $\mathcal{A}$ είναι αυθαίρετο.

Για ένα διάνυσμα $v \neq \mathbf{0}$, το ανάπτυγμα είναι όλα τα πολλαπλάσιά του, δηλαδή η ευθεία που περνά από το $\mathbf{0}$ στην κατεύθυνση του v. Για δύο μη-συνευθειακά (ή ταυτόγραμμα) διανύσματα, $\mathrm{span}(u, v)$ είναι επίπεδο που περνά από το $\mathbf{0}$. Καθώς ο ορισμός **υποχώρου** ενός Δ.Χ. είναι ακριβώς ότι είναι υποσύνολο του V κλειστό για γραμμικούς συνδυασμούς, βλέπουμε ότι *κάθε ανάπτυγμα δίνει υποχώρο του V!*

Στη συλλογή που έχουμε για να παράγουμε το ανάπτυγμα, ίσως υπάρχουν πλεονασμοί: διανύσματα τα οποία μπορούν να εκφρασθούν ως συνδυασμοί κάποιας υποσυλλογής. Τέτοιες σκέψεις μας οδηγούν στην έννοια της *βάσης* διανυσματικού χώρου.

Πριν περάσουμε σ' αυτό, ας δώσουμε κάποιες κρίσιμες ιδιότητες.

- Εάν $\{v_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* σύνολο διανυσμάτων, τότε οποιοδήποτε υποσύνολό του παραμένει γραμμικά ανεξάρτητο (εδώ $\mathcal{A}$ είναι ένα σύνολο δείκτη, για παράδειγμα $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, m\}$, αλλά πιθανόν και άπειρο).

- Εάν $\{v_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ είναι *γραμμικά εξαρτημένο* σύνολο διανυσμάτων, τότε και κάθε υπερσύνολό του, π.χ. το $\{w, v_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$, για w διάνυσμα του V, παραμένει γραμμικά εξαρτημένο.

Βάσεις: Ο τρόπος που θα ορίσουμε χώρο πεπερασμένης διάστασης δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικός: λέμε ότι ο Δ.Χ. V έχει **πεπερασμένη διάσταση** αν είναι ίσος με το ανάπτυγμα κάποιου πεπερασμένης πληθικότητας συνόλου διανυσμάτων του. Ο ορισμός αυτός αρκεί για να δείξουμε το βασικό αποτέλεσμα για ύπαρξη βάσης. **Βάση** του διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης είναι, όπως ξέρουμε, σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ με τις εξής δύο ιδιότητες: το ανάπτυγμά τους δίνει όλο τον V και είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Η βάση επιτρέπει να γράψουμε κάθε διάνυσμα με μοναδικό τρόπο ως γραμμικό συνδυασμό τους:

Θεώρημα 2.1. *Εάν $\mathcal{B}$ είναι βάση του χώρου V, τότε για κάθε $v \in V$ ορίζονται μοναδικοί αριθμοί x_i (οι συντεταγμένες του v ως προς τη βάση) τέτοιοι ώστε*

$$v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n.$$

Απόδειξη. Η ύπαρξη συντεταγμένων προκύπτει άμεσα από το $\operatorname{span}(\mathcal{B}) = V$. Για την μοναδικότητα, εάν $v = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_n b_n$ ήταν εναλλακτικός γραμμικός συνδυασμός που δίνει το v, αφαιρώντας, έχουμε

$$\mathbf{0} = (x_1 - y_1) b_1 + (x_2 - y_2) b_2 + \ldots + (x_n - y_n) b_n,$$

που από τη γραμμική ανεξαρτησία του $\mathcal{B}$ δίνει $x_i = y_i$ για όλα τα i. □

Παραθέτουμε κάποια βασικά και χρήσιμα αποτελέσματα για Δ.Χ.

Θεώρημα 2.2. *Κάθε διανυσματικός χώρος έχει σύνολο που είναι βάση του. Για χώρους πεπερασμένης διάστασης, ο αριθμός των διανυσμάτων σε κάθε βάση είναι σταθερός*

Η πληθικότητα κάθε βάσης είναι τότε η **διάσταση** του χώρου. Γράφουμε $\dim V = n$ και επομένως V^n.

Στο χώρο k^n, έχουμε τη **συνήθη** βάση $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, που έχουμε αναφέρει. Μερικές φορές θα θελήσουμε να θεωρήσουμε τη βάση με κάποια διάταξη, οπότε θα γράψουμε $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ που είναι διατεταγμένο σύνολο.

Θεώρημα 2.3 (Επέκταση σε βάση)**.** *Εάν $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου V, τότε το σύνολο αυτό μπορεί να επεκταθεί σε βάση, δηλαδή μπορούμε να βρούμε $n - m$ διανύσματα $b_{m+1}, \ldots, b_n$ ώστε το σύνολο $\{b_1, b_2, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n\}$ να δίνει βάση.*

Θεώρημα 2.4 (Αντικατάσταση)**.** *Έστω $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ βάση του V^n και $\{f_1, \ldots, f_m\}$ γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων. Τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε m από τα διανύσματα βάσης με τα f_j, δηλαδή να επιλέξουμε βάση*

$$\{f_1, \ldots, f_m, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{n-m}}\}, \quad b_{i_j} \in \mathcal{B}.$$

Σύνολο υποχώρων: Εάν U_1 και U_2 είναι υποχώροι του V, τότε η τομή τους $U_1 \cap U_2$ είναι πάντοτε υποχώρος του V, ενώ η ένωσή τους $U_1 \cup U_2$, γενικά, δεν δίνει υποχώρο (για παράδειγμα η ένωση δύο διακριτών ευθειών στο χώρο.) Για να ¨γεμίσουμε τα κενά,¨ με κάποιον τροπο, ορίζουμε το **άθροισμα υποχώρων**

$$U_1 + U_2 = \operatorname{span}(U_1, U_2),$$

δηλαδή το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών διανυσμάτων από την ένωση των δύο υποχώρων. Εύκολα βλέπουμε ότι αυτό είναι το ίδιο με το σύνολο

$$\{v \in V : \ v = u_1 + u_2, \ u_1 \in U_1, \ u_2 \in U_2\}$$

και ότι αποτελεί υποχώρο του V.

Από το θεώρημα επέκτασης βάσης, προκύπτει άμεσα το

Θεώρημα 2.5. *Με U_1, U_2 υποχώρους του V, $\dim V < \infty$, έχουμε*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Προσοχή: η τομή δύο υποχώρων δεν είναι ποτέ το κενό σύνολο —πάντα έχουν κοινό το $\mathbf{0}$. Εάν η τομή είναι ακριβώς το μονοσύνολο αυτό, δηλαδή $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$, τότε λέμε ότι έχουμε **ευθύ άθροισμα** και γράφουμε $U_1 \oplus U_2$ για το άθροισμά τους. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου $V = U_1 \oplus U_2$. Λέμε τότε ότι ο υποχώρος U_2 είναι συμπλήρωμα του υποχώρου U_1 (ή ανάποδα). Για παράδειγμα, $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^2 \oplus \mathbf{R}^1$, με $\mathbf{R}^2$ το οριζόντιο επίπεδο $\operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ και $\mathbf{R}^1$ την κάθετη ευθεία $\operatorname{span}(\mathbf{e}_3)$. Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι το συμπλήρωμα ενός υποχώρου δεν είναι μοναδικό (για γνήσιους υποχώρους).

2.2 Γραμμικές απεικονίσεις

Στην κατηγορία των διανυσματικών χώρων, όπου έχουμε ως θεμελιώδη έννοια αυτή του γραμμικού συνδυασμού, είναι φυσικό να προσάψουμε μιά ειδική κατηγορία συναρτήσεων, αυτές που διατηρούν τους γραμμικούς συνδυασμούς! Έτσι απλά προκύπτει η έννοια της **γραμμικής απεικόνισης**, που δεν είναι τίποτα περισσότερο από μιά συνάρτηση T μεταξύ διανυσματικών χώρων,[1] $T : V \to W$ τέτοια ώστε

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Η υπόλοιπη θεωρία των γραμμικών απεικονίσεων (ΓΑ) έπεται άμεσα, σε συνδυασμό με τις έννοιες του προηγουμένου εδαφίου. Είναι για παράδειγμα προφανές ότι υποχώροι του V απεικονίζονται σε υποχώρους του W και αντίστροφες εικόνες υποχώρων του W δίνουν υποχώρους του V. Ο πυρήνας της T είναι ακριβώς η αντίστροφη εικόνα του τετριμμένου υποχώρου $\{\mathbf{0}\}$, οπότε είναι υποχώρος του V, που γράφουμε $\ker T$.

[1] Ορισμένων πάνω από το ίδιο σώμα k.

Συνεχίζοντας, εάν επιλέξουμε βάση $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ του V^n και βάση $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ του W^m, η εικόνα κάθε διανύσματος βάσης του V εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης $\mathcal{F}$:

$$T(b_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j. \tag{2.1}$$

(δώστε προσοχή στην σειρά των δεικτών που φαίνεται ανάποδη, αλλά θα αποδειχθεί κατάλληλη αμέσως μετά.) Οι mn αριθμοί a_{ji} ορίζουν έναν $m \times n$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ο οποίος εκφράζει την ΓΑ T ως προς τις δοθείσες βάσεις. Αλλαγή βάσης στον V ή τον W οδηγεί σε διαφορετικό πίνακα (οπότε θα ήταν πιο σωστό να γράψουμε $A(\mathcal{B}, \mathcal{F})$.)

Το γενικό διάνυσμα $v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in V$ απεικονίζεται, από τη γραμμική ιδιότητα, στο $T(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(b_i) \in W$, το οποίο δίνει

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right) f_j = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j,$$

με τους συντελεστές y_j να δίνουν διάνυσμα $\mathbf{y}$ το οποίο είναι ακριβώς το γινόμενο του πίνακα A με το διάνυσμα $\mathbf{x}$: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$! (εξηγώντας έτσι και την επιλογή δεικτών στην 2.1).

Παρατήρηση 2.1. Είναι σαφές ότι κάθε στήλη του πίνακα A δίνει τις συντεταγμένες της εικόνας του αντίστοιχου διανύσματος βάσης του V ως προς τη βάση του W.

Με επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας, βλέπουμε επίσης ότι, αν έχουμε ΓΑ

$$T : U^d \to V^n, \quad S : V^n \to W^m,$$

με επιλεγμένες βάσεις, τότε η σύνθεσή τους είναι ΓΑ με πίνακα BA, όπου ο A εκφράζει την T και ο B την S. Έτσι δικαιολογείται απόλυτα και ο ορισμός γινομένου πινάκων.

Άσκηση 2.1. Θεωρήστε αλλαγές βάσεων $\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}'$ και $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F}'$ στους χώρους V^n και W^m αντίστοιχα. Εάν ο πίνακας της ΓΑ $T : V \to W$ ως προς $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$ είναι ο A, βρείτε έκφραση για τον πίνακα της T ως προς $\mathcal{B}'$, $\mathcal{F}'$.

2.3 Ορίζουσες

Η ορίζουσα είναι βαθμωτή συνάρτηση στο σύνολο τετραγωνικών πινάκων κάποιας διάστασης. Οι ιδιότητές της είναι ενδιαφέρουσες, αλλά συνήθως δίνονται

χωρίς την γεωμετρική τους ερμηνεία και ως αποτέλεσμα παραμένουν λίγο μυστήριες. Εδώ, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε στην ορίζουσα το γεωμετρικό της περιεχόμενο, διαλύοντας ίσως αυτή την αίσθηση μυστηρίου. Παρ' όλα αυτά, η παρουσίαση θα είναι πολύ σύντομη.

Για 2×2 πίνακες, η ορίζουσα είναι, όπως είναι γνωστό,

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc, \quad \text{γράφουμε και } \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Εάν ευθυγραμμίσουμε τους άξονες στο επίπεδο, έτσι ώστε το διάνυσμα της πρώτης στήλης να είναι οριζόντιο, βλέπουμε εύκολα ότι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας δίνει το *εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν οι δύο στήλες*. Σαν άσκηση, μπορείτε να δείξετε ότι αυτό ισχύει και στη γενική περίπτωση. Εάν τα διανύσματα είναι συνευθειακά ή αν το ένα από τα δύο είναι μηδενικό, η ορίζουσα μηδενίζεται. Επομένως μη-μηδενική ορίζουσα και γραμμική ανεξαρτησία των στηλών είναι ισοδύναμες έννοιες.

Το πρόσημο της $\det$ εξαρτάται από την *διάταξη* των διανυσμάτων (αλλάζει αν αλλάξουμε τη σειρά τους) και, καθώς η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 > 0,$$

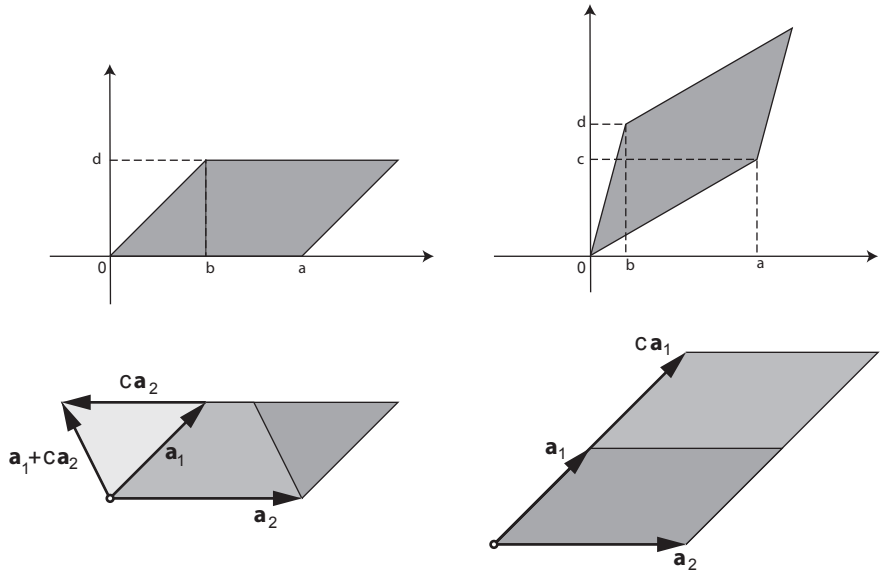
οι μη-ιδιάζοντες πίνακες χωρίζονται σε δύο υποσύνολα: αυτό των πινάκων με *θετική* ορίζουσα και αυτό με *αρνητική*. Συγκρίνοντας με τον μοναδιαίο πίνακα, του οποίου οι στήλες αναγνωρίζονται ως τα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ της κανονικής βάσης, χωρίζουμε το σύνολο των βάσεων σε δύο κατηγορίες: αυτές που έχουν τον ίδιο **προσανατολισμό** με την κανονική βάση (εννοούμε ότι η ορίζουσα είναι θετική) και αυτές με αντίθετο προσανατολισμό.

Από τη στοιχειώδη γεωμετρία στο επίπεδο βλέπουμε επίσης ότι το εμβαδόν δεν μεταβάλλεται εάν στην μία στήλη προσθέσουμε πολλαπλάσιο της άλλης και ότι αν πολλαπλασιάσουμε μία στήλη με αριθμό c, τότε και η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με c (Σχήμα 2.1).

Περνάμε στους 3×3 πίνακες. Έχουμε

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

αρκετά περίπλοκους και μυστηριώδεις τύπους. Ο πρώτος τύπος δίνεται συνήθως με τον κανόνα των διαγωνίων τριάδων (με πρόσημο ανάλογα με την κατεύθυνση της διαγωνίου). Ο σωστός τρόπος γενίκευσής του είναι να παρατηρήσουμε ότι κάθε τριάδα αποτελεί επιλογή για κάθε δείκτη σειράς i ενός



Σχήμα 2.1: Ορίζουσα και εμβαδόν.

δείκτη στήλης $\sigma(i)$ έτσι ώστε να επιλέγεται κάθε στήλη μία φορά. Παρατηρήστε ότι γράψαμε έτσι τις τριάδες, ώστε ο πρώτος δείκτης να είναι το 1,2 και 3 αντίστοιχα. Ο δεύτερος δείκτης διαβάζεται ως *μετάθεση* (permutation) του $(1, 2, 3)$. Έτσι βλέπουμε ότι οι όροι με θετικό πρόσημο αντιστοιχούν σε κυκλικές μεταθέσεις του $(1, 2, 3)$, ενώ αυτοί με αρνητικό σε μεταθέσεις που είναι *εναλλαγή* (transposition) δύο στοιχείων.

Για γενική διάσταση, λοιπόν, έχουμε τον τύπο

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sign} \sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

όπου γράψαμε S_n για την ομάδα των μεταθέσεων του $(1, 2, \dots, n)$ και $\operatorname{sign} \sigma = \pm$, ανάλογα με το αν η μετάθεση είναι περιττή ή άρτια (έννοια που ορίζεται από τον αριθμό των εναλλαγών που δίνει τη μετάθεση).

Στον δεύτερο τύπο έχουμε ¨ανάπτυγμα της πρώτης σειράς¨ και εύκολα παίρνουμε επαγωγικό ορισμό για γενική διάσταση n (ποιόν;)

Η γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας σε τρεις διαστάσεις είναι ακριβώς ανάλογη αυτής στο επίπεδο: *η ορίζουσα δίνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα τρία διανύσματα και το πρόσημο εξαρτάται από τη διάταξη των στηλών.* Εάν η τιμή της ορίζουσας είναι μη-μηδενική (ο πίνακας είναι μη-ιδιάζων), τότε οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και αντίστροφα. Για μη-ιδιάζοντες πινακες, η ορίζουσα θα είναι *θετική* εάν η βάση που προκύπτει από τις στήλες του A είναι ¨δεξιόστροφη¨ (προτιμούμε να λέμε ότι έχει τον ίδιο προσανατολισμό με την κανονική βάση του $\mathbf{R}^3$) και *αρνητική* εάν έχει αντίθετο προσανατολισμό (είναι ¨αριστερόστροφη¨).

Οι βασικές ιδιότητες της ορίζουσας έχουν και πάλι απλό γεωμετρικό περιεχόμενο: κλιμάκωση μιάς στήλης κλιμακώνει τον όγκο, πρόσθεση πολλαπλασίου άλλης στήλης δεν αλλάζει τον όγκο κ.ο.κ.

Η ορίζουσα δίνει άμεσα *κριτήριο γραμμικής ανεξαρτησίας* για n διανύσματα του V^n: $\det A = 0$ σημαίνει γραμμική εξάρτηση των στηλών και $\det A \neq 0$ γραμμική ανεξαρτησία τους.

Για m διανύσματα $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ του V^n, η γραμμική ανεξαρτησία τους μπορεί πάλι να ελεγχθεί μέσω της ορίζουσας: αρκεί να βρούμε $m \times m$ υποπινακα του $n \times m$ πίνακα $[v_1\ v_2 \cdots\ v_m]$ με μη-μηδενική ορίζουσα *(Άσκηση: δείξτε το αυτό).*

Από υπολογιστική σκοπιά, φυσικά, πολλά από τα παραπάνω γίνονται ευκολότερα μέσω της απαλοιφής Gauss. Η θεωρητική σημασία της ορίζουσας και το γεωμετρικό της περιεχόμενο παραμένουν πάντως πολύ σημαντικά.

2.4 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Η γενική μορφή συστήματος m γραμμικών εξισώσεων (ΣΓΕ) σε n αγνώστους είναι

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \tag{2.3}$$

Το ΓΣΕ σε μορφή πινάκων είναι απλά: $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in k^n$, $\mathbf{y} \in k^m$. Ισοδύναμα, έχουμε την εξής χρήσιμη, γεωμετρικά, ερμηνεία: θεωρούμε τις στήλες του A, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ ως διανύσματα του k^m. Το ΣΓΕ είναι τότε

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{y}.$$

Αυτό σημαίνει ότι *ψάχνουμε γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων στήλης ο οποίος να παράγει το δοθέν διάνυσμα* $\mathbf{y}$ *του* k^m. Η συμπαγής μορφή $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ δίνει το ίδιο, αν ερμηνεύσουμε τον πίνακα A ως τον πίνακα γραμμικής απεικόνισης $T : V^n \to W^m$ ως προς επιλεγμένες βάσεις (όχι απαραίτητα τις κανονικές!) Θυμίζουμε ότι οι στήλες του A είναι οι εικόνες των διανυσμάτων βάσης του V^n.

Από τα παραπάνω, έχουμε διαθέσιμο το κριτήριο ύπαρξης λύσης του ΣΓΕ: *υπάρχει λύση εάν και μόνον εάν το διάνυσμα* $\mathbf{y}$ *ανήκει στον υποχώρο-εικόνα* $\operatorname{im} T$ *της* T *(ή του* A*).* Η συνθήκη αυτή ύπαρξης δεν κάνει αναφορά στις διαστάσεις n και m. Θεωρητικά, μπορεί να έχουμε λύση ακόμα και αν έχουμε μεγαλύτερο αριθμό εξισώσεων από αγνώστους ($m > n$) και να μην υπάρχει λύση ενώ έχουμε λιγότερες εξισώσεις από αγνώστους ($m < n$).

Σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε τον πυρήνα της T, ή του A, και παρατηρούμε ότι αν $\mathbf{x}_0 \in \ker A$ και $\mathbf{x}$ είναι κάποια λύση, τότε το άθροισμα $\mathbf{x} + c\mathbf{x}_0$, $c \in k$ δίνει λύση, καθώς

$$A(\mathbf{x} + c\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x} + cA\mathbf{x}_0 = \mathbf{y} + c\mathbf{0} = \mathbf{y}.$$

Έτσι, φτάνουμε στο τελικό συμπέρασμα για την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων του ΓΣΕ 2.3:

Θεώρημα 2.6. *Το ΣΓΕ 2.3 έχει λύση εάν και μόνον εάν* $\mathbf{y} \in \operatorname{im} A$ *και το σύνολο όλων των λύσεων είναι τότε το* $\mathbf{x} + \ker A$*, όπου* $\mathbf{x}$ *είναι μία οποιαδήποτε (ειδική) λύση του.*

Καθώς ο πυρήνας είναι υποχώρος του k^n, το σύνολο λύσεων είναι μετατόπιση του υποχώρου $\ker A$ κατά το διάνυσμα $\mathbf{x}$. Τέτοια υποσύνολα λέγονται *αφινικοί υποχώροι* και αποτελούν το αντικείμενο μελέτης του επόμενου κεφαλαίου.

Στο σημείο αυτό, καλό είναι να αναλυθεί από τον αναγνώστη μιά σειρά ασκήσεων στα ΓΣΕ για διάφορες επιλογές διαστάσεων, για να αφομειωθεί το θεμελιώδες αυτο αποτέλεσμα *(δες Ασκήσεις)*. Εδώ, ας περιοριστούμε σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1. Θεωρούνε το σύστημα δύο εξισώσεων σε τρεις αγνώστους:

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 10 \\ 2x - y + 3z & = & 5 \end{array} \tag{2.4}$$

Λογικά, καθώς έχουμε $3 - 2 = 1$ βαθμό ελευθερίας, αναμένουμε ότι οι λύσεις θα περιλαμβάνουν μιά ελεύθερη μεταβλητή. Με τον παραδοσιακό (και μη-συστηματικό τρόπο) προχωρούμε επιλέγοντας μία από τις μεταβλητές ως ελεύθερη, ας πούμε το z. Έχουμε λοιπόν το σύστημα δύο εξισώσεων σε δύο αγνώστους

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 10 - z \\ 2x - y & = & 5 - 3z, \end{array}$$

το οποίο έχει λύσεις:

$$3x = 15 - 4z \Rightarrow x = 5 - \frac{4}{3}z, \quad y = 10 - z - x = 5 + \frac{1}{3}z.$$

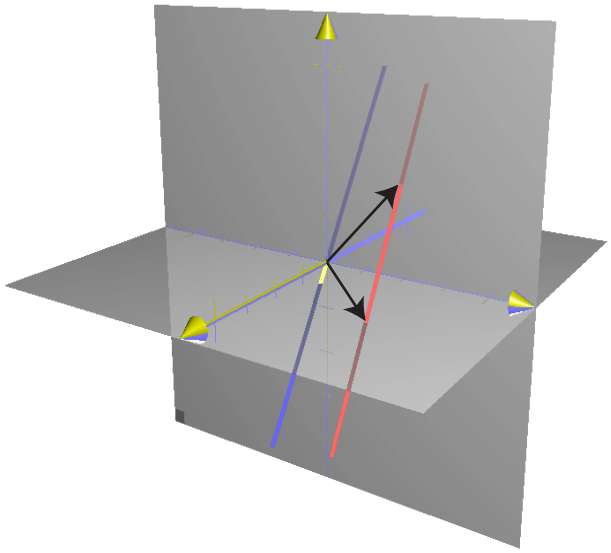
Γράφουμε το σύνολο των λύσεων που βρήκαμε:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - (4/3)z \\ 5 - (1/3)z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

το οποίο αναγνωρίζουμε ως εξίσωση ευθείας στο χώρο. Είμαστε ευχαριστημένοι, καθώς το σύνολο αυτό έχει τη δομή που θέλαμε: ειδική λύση σύν υποχώρο που πρέπει να είναι ο πυρήνας του A.

Τί θα βρίσκαμε άραγε αν αντί του z επιλέγαμε το x ως ελεύθερη μεταβλητή; Θα είχαμε

$$\begin{array}{rcl} y + z & = & 10 - x \\ -y + 3z & = & 5 - 2x, \end{array}$$



Σχήμα 2.2: Σύνολο λύσεων του ΓΣΕ 2.1 (κόκκινο) και πυρήνας (μπλε). Οι δύο ειδικές λύσεις με μαύρα βέλη.

οπότε

$$4z = 15 - 3x \Rightarrow z = \frac{15}{4} - \frac{3}{4}x, \quad y = 10 - x - 2 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}x.$$

Το σύνολο των λύσεων είναι τώρα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ (25/4) - (1/4)x \\ (15/4) - (3/4)x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25/4 \\ 15/4 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ -1/4 \\ -3/4 \end{bmatrix},$$

το οποίο δεν φαίνεται να έχει πολλή σχέση με το προηγούμενο. Τί συμβαίνει; Το θέμα του πυρήνα ξεκαθαρίζεται εύκολα, αν προσέξουμε ότι

$$\left(-\frac{4}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1/4 \\ -3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Είχαμε δηλαδή απλά δύο διαφορετικά διανύσματα ως βάση του μονοδιάστατου υποχώρου $\ker A$, και είδαμε ότι είναι πράγματι συνευθειακά.

Για να ολοκληρώσουμε την επαλήθευση ότι τα δύο σύνολα είναι πράγματι τα ίδια, θα πρέπει η διαφορά των ειδικών λύσεων να ανήκει στον πυρήνα. Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 25/4 \\ 15/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -(5/4) \\ -(15/4) \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ -1/4 \\ -3/4 \end{bmatrix} \in \ker A.$$

Μία πιο συστηματική μέθοδος εύρεσης λύσεων του ΣΓΕ είναι να βρούμε πρώτα τον πυρήνα και κατόπιν μιά οποιαδήποτε λύση (όσο πιό απλή γίνεται). Εδώ, για παράδειγμα, ο πυρήνας είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

που αντιστοιχεί στο 2.4. Καλό είναι να χρησιμοποιείται σταθερά c αντί του ονόματος μεταβλητής (x, z κλπ). Βρίσκουμε, θέτοντας $z = c$ για παράδειγμα,

$$\ker A = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Μιά απλή ειδική λύση βρίσκεται θέτοντας $z = 0$, οπότε $x = 5$ και $y = 5$ (όπως και πριν).

Τέλος, και η απαλοιφή Gauss δίνει ακριβώς ίδιο αποτέλεσμα, καθώς σε ένα κιόλας βήμα έχουμε

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 1 & -15 \end{array},$$

που δίνει την εξίσωση $-3y + z = 15$ όπως και πριν (βέβαια έχουμε χάσει κάθε γεωμετρική ερμηνεία, λόγος που όσο αποτελεσματική και να είναι η μέθοδος αυτή, από θεωρητική σκοπιά δεν προσφέρει τίποτα.)

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα της μελέτης της δομής του συνόλου λύσεων ΓΣΕ :

- Το σύνολο λύσεων, εφόσον δεν είναι κενό, έχει τη δομή $\mathbf{x}_p + \ker A$, με $\mathbf{x}_p$ ειδική λύση και $\ker A$ τον πυρήνα του A. Γεωμετρικά, είναι παράλληλη μετατόπιση του υποχώρου $\ker A$.
- Εάν $\ker A \neq \{\mathbf{0}\}$, η ειδική λύση δεν είναι μοναδικά ορισμένη. Μάλιστα, αν $\mathbf{x}_p$ και $\mathbf{x}'_p$ είναι λύσεις, η διαφορά τους είναι διάνυσμα του πυρήνα.
- Δεν υπάρχει επομένως φυσικός τρόπος επιλογής ειδικής λύσης.

2.5 Εξισώσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο

Ας οργανώσουμε τους τρόπους που δίνονται ευθείες και επίπεδα στο χώρο, εν είδει προεπισκόπησης κάποιων εννοιών που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο για γενικούς αφινικούς χώρους, και υποχώρους. Δουλεύουμε στον πραγματικό χώρο $\mathbf{R}^3$.

Αρχίζουμε από το σημείο αυτό να διαφοροποιούμε τις έννοιες *¨σημείο¨* και *¨διάνυσμα¨*. Προς το παρόν, αυτό δεν θα είναι καλά δικαιολογημένο, καθώς και τα δύο είναι στοιχεία του ίδιου διανυσματικού χώρου, αλλά αξίζει

να κρατήσει ο αναγνώστης τη διάκριση αυτή κατά νου, καθώς σύντομα θα διαχωρίσουμε ¨σύνολο σημείων¨ από τον διανυσματικό χώρο. Θα γράφουμε με έντονη γραμματοσειρά τα διανύσματα και στα σχήματα, τα σημεία θα σημειώνονται με τελείες και τα διανύσματα με τα γνωστά βέλη.

2.5.1 Ευθείες

Στο χώρο $\mathbf{R}^3$ δίνεται σημείο x_0 και διάνυσμα $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Η παραμετρική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο x_0 και είναι στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}$ είναι

$$\ell(x_0, \mathbf{v}) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = x_0 + t\mathbf{v},\ t \in \mathbf{R}\}.$$

(Ο παρατηρητικός αναγνώστης θα φέρει την ένσταση ότι προσθέσαμε διάνυσμα σε σημείο, αντικείμενα που ισχυριστήκαμε ότι διαχωρίζουμε. Δεκτή η ένσταση, αλλά υπομονή: σύντομα θα ξεκαθαρίσουμε ότι έχουμε άλλου είδους πρόσθεση, που επιτρέπει κάτι τέτοιο!)

Όπως είδαμε, το σημείο x_0 μπορεί να αντικατασταθεί από άλλο σημείο της ευθείας, δηλαδή με $x_0' = x_0 + c\mathbf{v}$, για κάποια τιμή της σταθεράς c, χωρίς να αλλάξει το σύνολο που ορίζεται.

Πιό φυσικός είναι ίσως ο ορισμός ευθείας μέσω δύο διακριτών σημείων της, $x_0 \neq x_1$, όπως γίνεται στη στοιχειώδη, σχολική Γεωμετρία. Ορίζοντας διάνυσμα $\mathbf{v} = x_1 - x_0$, παίρνουμε τον αρχικό μας ορισμό:[2]

$$\ell(x_0, x_1) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = x_0 + t(x_1 - x_0),\ t \in \mathbf{R}\}.$$

Τώρα μπορούμε να φέρουμε τον ορισμό της ευθείας σε πιό *συμμετρική* μορφή (δίνοντας ίσους ρόλους στα δύο σημεία), παρατηρώντας ότι

$$x_0 + t(x_1 - x_0) = (1-t)x_0 + tx_1 = \alpha x_0 + \beta x_1, \quad \text{με } \alpha + \beta = 1.$$

Έτσι, έχουμε τη συμμετρική μορφή ευθείας που ορίζεται από δύο σημεία $x_0 \neq x_1$:

$$\ell(x_0, x_1) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = \alpha x_0 + \beta x_1,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \alpha + \beta = 1\}.$$

2.5.2 Επίπεδα

Στο χώρο, δίνεται σημείο x_0 και δύο μη-συνευθειακά, μη-μηδενικά (δηλαδή γραμμικά ανεξάρτητα) διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Η παραμετρική εξίσωση του επιπέδου που περνά από το σημείο x_0 και προχωρά στις κατευθύνσεις των δύο διανυσμάτων είναι:

$$\mathcal{P}(x_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = x_0 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2,\ s, t \in \mathbf{R}\}.$$

[2] Και άλλη ένσταση από την αναγνώστρια: γιατί επιτρέψαμε αφαίρεση σημείων, που να δίνει αποτέλεσμα που είναι διάνυσμα; Δεκτή κι αυτή η ένσταση.

Εναλλακτικά, ορίζουμε επίπεδο μέσω τριών μη-συνευθειακών σημείων της: δίνονται τρία μη-συνευθειακά σημεία x_0, x_1, x_2 (πώς το ελέγχουμε αυτό;) Ορίζουμε δύο διανύσματα, επιλέγοντας για παράδειγμα τις διαφορές

$$\mathbf{v}_1 = x_1 - x_0, \quad \mathbf{v}_2 = x_2 - x_0.$$

(Πάλι αφαίρεση σημείων να δίνει διάνυσμα, δυσανασχετεί ο αναγνώστης!) Τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;) Έχουμε έτσι το επίπεδο

$$\mathcal{P}(x_0, x_1, x_2) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = x_0 + s(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0),\ s, t \in \mathbf{R}\}.$$

Όπως κάναμε για ευθείες , θέλουμε να φέρουμε τον ορισμό σε πιό συμμετρική μορφή. Παρατηρούμε λοιπόν ότι

$$x_0 + s(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0) = (1 - s - t)x_0 + sx_1 + tx_2.$$

Έχουμε τώρα τρεις συντελεστές, που το άθροισμά τους είναι ίσο με μονάδα:

$$\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2, \quad \text{με } \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Αυτό δίνει την τελική, συμμετρική μορφή

$$\mathcal{P}(x_0, x_1, x_2) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R},\ \alpha + \beta + \gamma = 1\}.$$

2.5.3 Αφινικοί συνδυασμοί

Έχοντας χειριστεί έννοιες σημείων, διανυσμάτων, πρόσθεσης και αφαίρεσης με τρόπο που δεν φαίνεται εκ πρώτης όψεως πολύ αυστηρός από μαθηματική σκοπιά, οφείλουμε τουλάχιστον να αναγνωρισουμε ένα νέο τύπο συνδυασμών, που αφορά αυτά που ονομάσαμε ¨σημεία¨. Πρόκειται για συνδυασμούς με συντελεστές που δεν είναι ελεύθεροι, αλλά περιορίζονται στο να έχουν άθροισμα ένα. Ιδού ο ορισμός:

Ορισμός 2.2. Εάν $x_0, x_1, \ldots, x_m$ είναι σημεία του χώρου V, **αφινικός συνδυασμός** τους λέγεται άθροισμα

$$t_0 x_0 + t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n,$$

με το άθροισμα των συντελεστών $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1$.

Η σύγκριση με τους **γραμμικούς συνδυασμούς** διανυσμάτων

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_m \mathbf{v}_m,$$

όπου οι συντελεστές $\alpha_i \in \mathbf{R}$ είναι ¨ελεύθεροι¨ δείχνει πόσο έχουμε περιορίσει την έννοια του συνδυασμού. Προφανώς, αφινικός συνδυασμός είναι και γραμμικός, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Μάλιστα, ενώ το $\mathbf{0}$ πάντοτε προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων, δεν είναι καθόλου απαραίτητο να προκύπτει ως αφινικός συνδυασμός (σκεφτείτε την περίπτωση ευθείας που δεν περνά από την αρχή των αξόνων και τον τελικό μας ορισμό ευθείας.)

Είδαμε μόλις ότι *το σύνολο όλων των αφινικών συνδυασμών δύο διακριτών σημείαων είναι ευθεία, ενώ το σύνολο όλων των αφινικών συνδυασμών τριών μη-συνευθειακών σημείων είναι επίπεδο στο χώρο.* Στο επόμενο Κεφάλαιο, θα εξηγήσουμε πώς η έννοια του αφινικού χώρου γενικεύει τις περιπτώσεις αυτές.

2.6 Ασκήσεις

[Στο ΔΧ. $\mathbf{R}^n$ θεωρούμε γνωστή την κανονική βάση $\mathcal{E}_n = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, με κάθε $\mathbf{e}_i$ να έχει μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο το 1 στη θέση i.]

1. (α') Ποιά είναι η σχέση μεταξύ $\operatorname{span}(u_1, u_2)$ και $\operatorname{span}(u_1 - u_2, u_2)$, όπου u_1, u_2 είναι μη-μηδενικά, μη-συνευθειακά διανύσματα διανυσματικού χώρου V^n.

   (β') Συγκρίνετε τα $\operatorname{span}(u_1, u_2, u_3)$ και $\operatorname{span}(u_1 + u_2 + u_3, u_2 + u_3, u_3)$ για γενικά διανύσματα $u_1, u_2, u_3 \in V^n$.

2. (α') Δείξτε ότι η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

   είναι $\det A = (a - c)(b - a)(b - c)$.

   (β') Βασιζόμενοι στο παραπάνω, βρείτε δέκα διανύσματα στο χώρο $\mathbf{R}^3$ τέτοια ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   (γ') Δώστε μία τέτοια τριάδα που να δίνει *όγκο* του παραλληλεπιπέδου που ορίζει ίσο με μονάδα.

3. Δίνονται υποχώροι του $\mathbf{R}^3$:

$$W_1 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right), \quad W_2 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

   (α') Να βρεθεί η τομή των δύο **υποχώρων**, $W_1 \cap W_2$.

   (β') Να βρεθεί η τομή των **επιπέδων** $2\mathbf{e}_1 + W_1$και $\mathbf{e}_3 + W_2$.

4. Δώστε το σύνολο των λύσεων καθενός από τα παρακάτω γραμμικά συστήματα $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ και ερμηνεύστε το γεωμετρικά (εφόσον είναι μη-κενό.)

$$(a) \begin{bmatrix} -7 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} -3 & 4 & 11 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ k \\ 7 \end{bmatrix}, \text{ για διάφορες τιμές της σταθεράς } k.$$

Δώστε επίσης και την εικόνα της γραμμικής απεικόνισης που εκφράζει κάθε πίνακας A, υποθέτοντας ότι πήραμε κανονικές βάσεις παντού. Περιγράψτε τί θα συμβεί εάν *διαταράξουμε* ένα από τα στοιχεία του πίνακα A στο δεύτερο σύστημα (δηλ. αν προσθέσουμε μικρό ϵ).

5. (α΄) Δείξτε ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

στον χώρο $\mathbf{R}^4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(β΄) Βρείτε τέταρτο διάνυσμα $\mathbf{v}_4$ ώστε να έχουμε βάση του $\mathbf{R}^4$.

6. Επιλέγουμε βάσεις

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

των Δ.Χ. $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$ αντίστοιχα. Μία γραμμική απεικόνιση $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ έχει πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{F}$.

(α΄) Δώστε τον πίνακα της T ως προς τις συνήθεις βάσεις $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2$.

(β΄) Βρείτε την εικόνα του διανύσματος

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$