



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## Κλασική Διαφορική Γεωμετρία Ι

Δεύτερη Πρόοδος – 14 Ιανουαρίου 2016

Διάρκεια εξέτασης 45 λεπτά

Όνομα _____
A.M. _____

Θέμα	1	2	3	Σύνολο
Μονάδες	5	3	3	11
Βαθμός				

1. Θεωρούμε την κανονική επιφάνεια  $\Sigma$  του γραφήματος της συνάρτησης  $z = xy$ .

(α) Υπολογίστε το κάθετο μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{n}(x, y)$  της επιφάνειας  $\Sigma$ .

(β) Δώστε τους πίνακες  $Q(x, y)$  και  $P(x, y)$  της πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής και επομένως βρείτε τη συνάρτηση καμπυλότητας Gauss  $K(x, y)$ . Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο ελάχιστης καμπυλότητας και βρείτε τις καμπύλες σταθερής καμπυλότητας στο επίπεδο  $xy$ .

(γ) Θεωρούμε τις επίπεδες καμπύλες  $\gamma(\theta)$  τομής της  $\Sigma$  με κάθετα επίπεδα, τα οποία διέρχονται από το  $(0, 0, 0)$  και είναι σε γωνία  $\theta$  με τον θετικό άξονα  $x$ . Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη καμπυλότητα των  $\gamma(\theta)$  στο σημείο  $(0, 0, 0)$  και τις αντίστοιχες τιμές της  $\theta$ . Bonus: Δείξτε ότι, με εξαίρεση δύο γωνιών, για όλες τις υπόλοιπες, το πεδίο  $\mathbf{n}$  για  $(x, y) \neq (0, 0)$  δεν ανήκει στο επίπεδο τομής και επομένως το κάθετο πεδίο της καμπύλης τομής δεν είναι συνευθειακό με το  $\mathbf{n}$ .

(5)

2. Δίνεται επιφάνεια  $\Sigma$  και σημείο της  $\mathbf{r} \in \Sigma$  όπου οι πρωτεύουσες καμπυλότητες είναι  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ . Εάν  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  είναι οι αντίστοιχες πρωτεύουσες κατευθύνσεις, βρείτε τις κατευθύνσεις όπου η καμπυλότητα παίρνει την τιμή  $\frac{\kappa_1}{4} + \frac{3\kappa_2}{4}$ . Εάν υποθέσουμε επιπλέον ότι  $\kappa_1 > 0 > \kappa_2$ , δώστε τις ασυμπτωτικές κατευθύνσεις στο σημείο  $\mathbf{r}$ .

(3)

3. Έστω  $(x(t), z(t))$  κανονική παραμέτρηση καμπύλης στο επίπεδο  $\{y = 0\} \subset \mathbf{R}^3$ , με  $x(t) > 0 \forall t$ . Δείξτε ότι περιστροφή γύρω από τον κάθετο άξονα  $z$  δίνει κανονική επιφάνεια. Δείξτε επίσης ότι σε κάθε σημείο όπου  $\dot{z}(t) \neq 0$ , η κάθετη ευθεία στην επιφάνεια τέμνει τον άξονα  $z$ .

(3)