Κλασική Διαφορική Γεωμετρία Ι

1η Πρόοδος, 16-11-2015

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1 α') $|\vec{t}_0| = |\vec{n}_0| = |\vec{b}_0| = 1$ και $\vec{t}_0\cdot\vec{n}_0 = \vec{t}_0\cdot\vec{b}_0 = \vec{n}_0\cdot\vec{b}_0 = 0$, άμεσο

$\Rightarrow$ είναι ο.κ. βάση του $\mathbb{R}^3$ (γραμμική ανεξαρτησία φευγάτη!)

$$\det\begin{bmatrix} -1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 \\ 1/\sqrt3 & 0 & 2/\sqrt6 \\ 1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & -1/\sqrt6 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt2\sqrt3\sqrt6}\det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac16(1+2+2+1) = 1 \checkmark$$

(Ιδιότητα det!) $\Rightarrow$ δεξιόστροφη βάση

$\vec{v} = x\vec{t}_0 + y\vec{n}_0 + z\vec{b}_0$ και η βάση ο.κ.

$\Rightarrow x = \vec{v}\cdot\vec{t}_0 = \frac{1}{\sqrt3}(-3-2+5) = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt2}8$, $z = \frac{1}{\sqrt6}(3-4-5) = -\sqrt6$

β') Μοναδική λύση με κ, τ σταθερές είναι έλικα

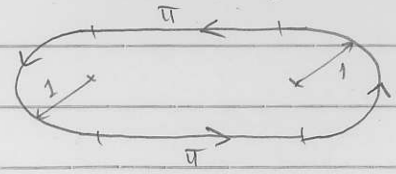
γ') Κέντρο $\vec{p}(0) + \frac{1}{\kappa(0)}\vec{n}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac12\begin{bmatrix} 1/\sqrt2 \\ 0 \\ 1/\sqrt2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt2 \\ 1 \\ \sqrt2 \end{bmatrix}$

Ακτίνα $R(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac12$

Παραμέτρηση: π.χ. $\begin{bmatrix} 1/2\sqrt2 \\ 1 \\ 1/2\sqrt2 \end{bmatrix} + \frac12\cos t\,\vec{n}_0 + \frac12\sin t\,\vec{n}_0 \quad t\in(0,2\pi]$

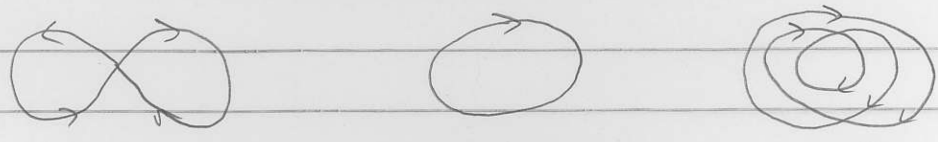
2 (α') $\kappa=0 \to$ ευθ. τμήμα, $\kappa=1$ τόξο κύκλου ακτίνας $\frac1\kappa = 1$ με θετική φορά

$\longrightarrow$



(κλασική!)

(β')



0 $\qquad -2\pi \qquad -6\pi$

3 $\forall t \quad |\vec{v}(t)|^2 = R^2 \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}(t) = 0 \to \frac{d\vec{v}}{dt}\perp\vec{v}(t) \checkmark$

Παραγωγίζοντας ξανά

$$\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}\cdot\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}\cdot\overbrace{\frac{\vec{v}}{R}}^{\text{μοναδιαίο}} = \underbrace{-\frac1R\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|^2}_{\text{η συνιστώσα στην κατεύθυνση του } \vec{v}/R} \le 0$$

— // —