Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Μαθηματικων

Κλασική Διαφορική Γεωμετρία I

Πρώτη Πρόοδος – 16 Νοεμβρίου 2015

Διάρκεια εξέτασης 45 λεπτά

Όνομα ______________________________

Α.Μ. ______________________________

Θέμα	1	2	3	Σύνολο
Μονάδες	5	3	2	10
Βαθμός				

1. (α΄) Δείξτε ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

δίνουν δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση και βρείτε τις συντεταγμένες x, y, z του διανύσματος

$$\mathbf{v} = 3\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$$

ως προς τη βάση αυτή: $\mathbf{v} = x\,\mathbf{t}_0 + y\,\mathbf{n}_0 + z\,\mathbf{b}_0$.

(β΄) Τα διανύσματα θεωρούνται τώρα ως αρχικές τιμές για την εύρεση καμπύλης μέσω της λύσης των εξισώσεων Frenet-Serret που περνά από το αρχικό σημείο $\boldsymbol{\rho}(0) = \mathbf{j}$. Περιγράψτε τη λύση εάν οι συναρτήσεις καμπυλότητας και στρέψης είναι $\kappa(s) = 2$, $\sigma(s) = 1$.

(γ΄) Δώστε την εξίσωση του εφαπτόμενου κύκλου στο αρχικό σημείο της καμπύλης.

(5)

2. (α΄) Η κανονική C^1 καμπύλη $\boldsymbol{\rho}(s)$ στο επίπεδο, με φυσική παραμέτρηση και $s \in [0, 4\pi]$, έχει συνάρτηση καμπυλότητας

$$\kappa(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, \pi) \\ 0, & s \in [\pi, 2\pi) \\ 1, & s \in [2\pi, 3\pi) \\ 0, & s \in [3\pi, 4\pi) \end{cases}$$

Κάνετε προσεκτικά το σχήμα της καμπύλης αυτής, εξηγώντας τη δουλειά σας (η καμπύλη δεν είναι προφανώς C^2).

(β΄) Δώστε τρεις κλειστές καμπύλες που είναι εμβυθίσεις στο επίπεδο και με συνολική μεταβολή γωνίας $\theta(l) - \theta(0) = \int_0^l \kappa(s)\,ds = 0, -2\pi$ και -6π (όπου l το συνολικό μήκος).

(3)

3. Δείξτε ότι εάν έχουμε C^2 καμπύλη $\mathbf{v}(t)$ (όχι απαραίτητα κανονική) πάνω στη σφαίρα $S^2(R) = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ (με $R > 0$), τότε το διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης είναι παντού εφαπτόμενο της σφαίρας. Υπολογίστε τη συνιστώσα της επιτάχυνσης στην κατεύθυνση της ακτίνας, δηλαδή της ευθείας που ορίζει το $\mathbf{v}(t)$.

(2)