Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων

Κλασικη Διαφορικη Γεωμετρια

Δεύτερη Εργασία

(Θεωρία καμπυλών στο επίπεδο και στον χώρο)

Η εργασία αυτή συνδυάζει θεωρία και κάποια βασικά παραδείγματα. Απαιτεί τη χρήση υπολογιστή για να γίνουν γραφήματα καμπυλών κα συναρτήσεων. Γεωμετρία χωρίς εικόνες δεν γίνεται!

Καμπύλες στο επίπεδο

Θεωρούμε *κανονική παραμέτρηση καμπύλης* στο $\mathbf{R}^2$:

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}, \text{ με } \frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq \mathbf{0}\ \forall t.$$

Η φυσική παραμέτρηση γράφεται $\boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(t(s))$, οπότε $\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} / \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$ και $\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{ds^2} = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, με το κάθετο διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{n}(s) = J\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}, \quad \text{όπου } J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας περιστροφής κατά $\pi/2$ στην θετική φορά. Θυμίζουμε ότι πολύ συχνά είναι δύσκολο ή αδύνατο να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση $t(s)$ της $s(t)$, ακόμα και αν αυτή η τελευταία είναι διαθέσιμη, και επομένως δεν είναι διαθέσιμη η φυσική παραμέτρηση.

1. Δείξτε, βασισμένοι στους παραπάνω τύπους, ότι η συνάρτηση καμπυλότητας μπορεί να υπολογιστεί *απευθείας από την αρχική παραμέτρηση* από τον τύπο:

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot J\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}.}$$

2. Δώστε επίσης τύπους για το *κέντρο* $\mathbf{C}(t)$ και την *ακτίνα* $R(t)$ του εγγύτατου (ή εφαπτομένου) κύκλου στο σημείο $\mathbf{r}(t)$.

3. Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω για την περίπτωση **σπείρας** στο επίπεδο.

   (α΄) Οι σπείρες δίνονται συνήθως σε πολική μορφή: έχουμε τη *σπείρα του Αρχιμήδη*, $r = a\theta$ και την *εκθετική σπείρα* $r = ae^{b\theta}$, για κάποια $a, b \neq 0$. Το r είναι το μέτρο του $\mathbf{r}$, $r = |\mathbf{r}|$, αλλά, προσοχή, η ¨γωνία¨ θ θεωρείται να ανήκει στο $\mathbf{R}_+$—και όχι κάποιο διάστημα μήκους 2π.

   Θα εργαστούμε πάνω στην απλή σπείρα του Αρχιμήδη όπου $a = 1$. Η παραμέτρηση καμπύλης δίνεται (γιατί;) από τις εξισώσεις:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{bmatrix}, \ t \geq 0.$$

   Υπολογίστε τη συνάρτηση μήκους $s(t)$ και δώστε γράφημά της. Υποθέτουμε χωρίς απόδειξη ότι δεν υπάρχει αναλυτική μορφή για την αντίστροφη συνάρτησή της $t(s)$.

(β΄) Επομένως, υπολογίστε τη συνάρτηση καμπυλότητας $\kappa(t)$ από την *αρχική παραμέτρηση* και δείξτε ότι είναι μονοτονική στο $\{t \geq 0\}$.

(γ΄) Βρείτε το κέντρο και ακτίνα του εφαπτομένου κύκλου στη σπείρα στο $t = 4$ και δώστε παραμέτρησή του. Με τη βοήθεια λογισμικού, κάνετε τα γραφήματα και παρατηρήστε ότι για $t > 4$, η σπείρα βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.

Συνεχίζουμε με κάποιες επιπλέον ασκήσεις:

4. Υποθέτουμε ότι έχουμε κανονική, λεία **κλειστή** καμπύλη (δηλαδή $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$, με $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0$ και $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(a) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(b)$) η οποία είναι *παντού μη-μηδενική*: $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$.

   Θεωρούμε χρόνο t_0 όπου το μέτρο $|\mathbf{r}(t_0)|$ είναι ελάχιστο (γιατί ξέρουμε ότι υπάρχει τέτοιο t_0; Είναι απαραίτητα μοναδικό; Δώστε πρόχειρα παραδείγματα.) Δείξτε ότι το διάνυσμα ταχύτητας $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$ είναι κάθετο στο $\mathbf{r}(t_0)$.

5. **Σταθερή καμπυλότητα:** Θα δείξουμε, βήμα-βήμα, ότι εάν μία καμπύλη έχει σταθερή, μη-μηδενική καμπυλότητα $\kappa > 0$, τότε είναι τόξο κύκλου ακτίνας $R = 1/\kappa$ (το αντίστροφο είναι προφανές.) Θα κάνουμε χρήση των σχέσεων:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \kappa\,\mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\kappa\,\mathbf{t} \end{cases} \quad \text{(Σχέσεις Frenet)}$$

$$\mathbf{n} = J\mathbf{t}, \text{ οπότε, καθώς } J^2 = -I, \ \mathbf{t} = -J\mathbf{n}.$$

   (α΄) Δείξτε ότι η δεύτερη εξίσωση Frenet είναι απόρροια της πρώτης, από την παραπάνω σχέση, και παρατηρήστε ότι έχουμε: $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa J\mathbf{t}$.

   Θα λύσουμε το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων: θέτουμε $\mathbf{t}(s) = \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι και οι δύο συναρτήσεις ικανοποιούν την ίδια εξίσωση δευτέρας τάξης:

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \kappa^2 u = 0, \ \frac{d^2v}{ds^2} + \kappa^2 v = 0,$$

   η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή και έχει λύση, π.χ. για την u:

$$u(s) = a\cos(\kappa s) + b\sin(\kappa s).$$

   Υποθέτοντας αρχική τιμή του διανύσματος ταχύτητας $\mathbf{t}(0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$ που πρέπει να είναι μοναδιαίο, δηλαδή $u_0^2 + v_0^2 = 1$, βρείτε τη λύση $\mathbf{t}(s)$.

   (β΄) Δείξτε ότι έχουμε $|\mathbf{t}(s)| = 1, \forall s$, έχουμε δηλαδή λύση που αυτόματα δίνει μοναδιαίο πεδίο ταχύτητας. Τέλος, ολοκληρώνοντας, βρείτε την καμπύλη σταθερής καμπυλότητας κ και επαληθεύστε ότι είναι κύκλος ακτίνας $R = 1/\kappa$.

6. **Έλλειψη:** Δώστε παραμέτρηση $\mathbf{r}(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ για την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, όπου υποθέτουμε $a > b > 0$ (παραλλαγή πολικών συντεταγμένων). Υπολογίστε από τον τύπο που έχετε βρει τη συνάρτηση καμπυλότητας $\kappa(t)$ και βρείτε τα σημεία μέγιστης και ελάχιστης καμπυλότητας.

   Τέλος, δώστε την καμπύλη των κέντρων των εγγύτατων ή εφαπτόμενων κύκλων και, με χρήση κάποιου λογισμικού, δώστε το γράφημά της. Η καμπύλη αυτή δεν είναι, γενικά, κανονική και λέγεται **ενειλιγμένη** της αρχικής (evolute).

7. **Η έλκουσα καμπύλη (tractrix):** είναι η επίπεδη καμπύλη, μία παραμέτρηση της οποίας είναι:

$$\mathbf{r}(t) = \left[\begin{array}{c} \cos t + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ \sin t \end{array} \right],\ t \in (0, \pi).$$

   (α΄) Δώστε το γράφημα της καμπύλης και δείξτε ότι είναι κανονική παντού, εκτός από ένα σημείο.

   (β΄) Υπολογίστε τη συνάρτηση καμπυλότητας $\kappa(t)$.

   (γ΄) Ο λόγος που λέγεται *΄ελκουσα* αυτή η καμπύλη είναι ότι το μήκος του τμήματος κάθε εφαπτομένης ευθείας μεταξύ της καμπύλης και του οριζοντίου άξονα είναι σταθερή (η ερμηνεία που δίνεται είναι ότι κινούμενοι κατά μήκος του οριζοντίου άξονα με αρχή το 0, σύρουμε ένα αντικείμενο που συνδέεται με λουρί (έναν σκύλο;!) και ποθ ξεκινά από το σημείο $(0, 1)$). Δείξτε την ιδιότητα αυτή και δώστε την τιμή του σταθερού αυτού μήκους.

Καμπύλες στο χώρο

8. **Καμπύλη του Viviani:** είναι η τομή σφαίρας με κύλινδρο μισής ακτίνας που εφάπτεται της σφαίρας, είναι δηλαδή η τομή των επιφανειών:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

   (Κάνετε το σχήμα, κατά προτίμηση με υπολογιστή.)

   Υπολογίστε παραμέτρηση της καμπύλης που προκύπτει ως εξής: κατ΄ αρχήν, για τον κύλινδρο, χρησιμοποιήστε την παραμέτρηση $x(t) = (R/2) + (R/2)\cos(t)$, $y(t) = (R/2)\sin(t)$, $z = z$ (που είναι απλά μετατοπισμένες κυλινδρικές συντεταγμένες.) Αντικαταστήσετε αυτά στην εξίσωση της σφαίρας και υπολογίστε το z μέσω τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.

   Δείξτε ότι έχουμε κανονική παραμέτρηση κλειστής καμπύλης, με μόνη διαφορά ότι δεν είναι 1:1 με την εικόνα της. Δώστε το μοναδικό σημείο αυτοτομής.

9. **Καμπύλες Bézier:** Στα σχεδιαστικά λογισμικά (π.χ. Adobe Illustrator, CorelDRAW κ.ο.κ.) είναι πολύ χρήσιμες κάποιες καμπύλες με συντεταγμένες πολυώνυμα χαμηλού βαθμού στο t:

   Η *γραμμική καμπύλη Bézier* είναι η καμπύλη πρώτου βαθμού $\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1$, με $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{v}_1$ δύο σημεία. Προφανώς, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{v}_1$ και $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$.

   Η *τετραγωνική καμπύλη Bézier* χρησιμοποιεί τρία διακριτά σημεία:

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\left[(1-t)\mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1\right] + t\left[(1-t)\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2\right] = (1-t)^2\mathbf{v}_0 + 2t(1-t)\mathbf{v}_1 + t^2\mathbf{v}_2.$$

   Προφανώς $\mathbf{r}(0) = \mathbf{v}_0$ και $\mathbf{r}(1) = \mathbf{v}_2$. Βρείτε τα διανύσματα ταχύτητας για $t = 0$ και $t = 1$ και δείξτε ότι η καμπύλη ανήκει στο κυρτό περίβλημα των τριών σημείων, δηλαδή μέσα στο τρίγωνο που ορίζουν και είναι επομένως επίπεδη. Εξηγήστε πώς θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε την καμπύλη αυτή από το τελικό της σημείο με μία ακόμα τετραγωνική καμπύλη, ώστε η συνάρτηση ταχύτητας να είναι συνεχής.

10. Δίνεται κανονική παραμέτρηση καμπύλης στο χώρο, με

$$\mathbf{r}(t) = \left[\begin{array}{c} x(t) \\ ax(t) + b \\ z(t) \end{array} \right],\ a \neq 0.$$

Δείξτε ότι η καμπύλη αυτή έχει μηδενική στρέψη και επομένως είναι επίπεδη και βρείτε το επίπεδο που την περιέχει. Δώστε δεύτερη, πιό άμεση απόδειξη ότι είναι επίπεδη, θεωρώντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών.

11. Δείξτε ότι η ενειλιγμένη καμπύλη $\boldsymbol{\rho}(s)+\frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)$ της έλικας $\mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t)\,\mathbf{i}+R\sin(\omega t)\,\mathbf{j}+vt\,\mathbf{k}$ $(R, \omega, v > 0)$, είναι πάλι έλικα.

    Βρείτε συνθήκη ώστε η ενειλιγμένη αυτή έλικα να κείται στον ίδιο κύλινδρο με την αρχική έλικα.

12. Δείξτε ότι οι εξισώσεις Frenet-Serret γράφονται σε μορφή πινάκων, ορίζοντας τους 3×3 πίνακες

$$\Phi(s) = [\mathbf{t}(s)|\mathbf{n}(s)|\mathbf{b}(s)],\ \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\sigma(s) \\ 0 & \sigma(s) & 0 \end{bmatrix},$$

ως το σύστημα εξισώσεων

$$\frac{d}{ds}\Phi(s) = \Phi(s)\Omega.$$

Για γενικό αντισυμμετρικό πίνακα

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix},$$

δείξτε ότι ορίζεται κατάλληλο διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}$, έτσι ώστε για διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$,

$$\Omega\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Τέλος, δείξτε ότι ορίζεται κατάλληλο $\boldsymbol{\omega}(s)$ (λεγόμενο διάνυσμα Darboux) τέτοιο ώστε οι εξισώσεις Frenet-Serret γράφονται:

$$\frac{d}{ds}\mathbf{t}(s) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}, \quad \frac{d}{ds}\mathbf{n}(s) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \quad \frac{d}{ds}\mathbf{b}(s) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$$

(το ίδιο και για τις τρεις εξισώσεις!)

ΕΚ, 5-11-15