Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων, Τμημα Μαθηματικων

Κλασικη Διαφορικη Γεωμετρια

Πρώτη Εργασία

(Υπόβαθρο γνώσεων από Γραμμική Άλγεβρα, Λογισμό κλπ)

[Τα διανύσματα δίνονται για τυπογραφική ευκολία ως γραμμές, αλλά στους υπολογισμούς να μετατρέπονται σε διανύσματα στήλης.]

1. Επαληθεύστε τον τύπο του Euler:
$$v - e + f = 2,$$
όπου v, e, f είναι οι πληθικότητες των κορυφών/ακμών/εδρών αντίστοιχα, για όλα τα Πλατωνικά στερεά. Προαιρετικά, επαναλάβετε για κάποια από τα στερεά του Αρχιμήδη (π.χ. το κόλουρο εικοσάεδρο, δηλαδή μιά μπάλα του ποδοσφαίρου!)

2. Δώστε τον πίνακα A της γραμμικής απεικόνισης $p \mapsto p'$ "παραγώγισης" στο Δ.Χ. πολυωνύμων βαθμού το πολύ n ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Επαληθεύστε ότι ο A^2 δίνει διπλή παραγώγιση και δείξτε ότι $A^{n+1} = 0$ (λέμε ότι ο A είναι μηδενοδύναμος).

3. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbf{R}^3$ θεωρούμε τα διανύσματα
$$b_1 = (1, 3, -1), \quad b_2 = (0, 1, 1), \quad b_3 = (1, 1, 2).$$
   (α΄) Δείξτε ότι αποτελούν βάση $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ του $\mathbf{R}^3$.

   (β΄) Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $v = (-3, 7, 1)$ ως προς τη βάση αυτή: $v = \sum_{i=1}^{3} x_i b_i$.

   (γ΄) Εφαρμόστε τη διαδικασία Gram-Schmidt στην $\mathcal{B}$ με τη διάταξη (b_1, b_2, b_3) για να βρείτε ορθοκανονική βάση $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ και βρείτε τις συντεταγμένες του v ως προς τη βάση $\mathcal{E}$.

   (δ΄) Βρείτε την προβολή του b_3 στο επίπεδο $\mathrm{span}(b_1, b_2)$.

4. Δώστε τουλάχιστον δύο διαφορετικές αποδείξεις της ανισότητας Cauchy-Schwartz και με χρήση της, δείξτε την τριγωνική ανισότητα στο $\mathbf{R}^n$
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

5. Δώστε αποδείξεις όσων από τα παρακάτω δεν έχετε συναντήσει:

   (α΄) Οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού τετραγωνικού πίνακα είναι όλες πραγματικές.

   (β΄) Ο συμμετρικός τετραγωνικός Q λέγεται **θετικά ορισμένος** εάν για κάθε διάνυσμα $v \neq 0$, η τιμή της τετραγωνικής συνάρτησης $q(v) = v \cdot Qv$ είναι θετική. Ισοδύναμες συνθήκες είναι: (α) όλες οι ιδιοτιμές του Q είναι θετικές και (β) όλες οι κύριες ελάσσονες ορίζουσες του Q είναι θετικές.

   Κατόπιν, δείξτε ότι ορίζεται μέσω του Q *εσωτερικό γινόμενο* στο $\mathbf{R}^n$ ως εξής:
$$< u, v >_Q = u \cdot Qv,$$

όπου $\cdot$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Τέλος, δείξτε ότι ο πίνακας

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος και βρείτε διάνυσμα v ορθογώνιο στο $u = (1, 2, 1)$ ως προς το νέο αυτό εσωτερικό γινόμενο.

6. *Γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου:* Ο εναλλακτικός ορισμός του εξωτερικού γινομένου στο $\mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\theta \, \mathbf{n},$$

περιλαμβάνει το γεωμετρικά προφανές εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα δύο διανύσματα, αλλά δεν εξηγεί την παρουσία του δισκάθετου $\mathbf{n}$.

Θυμίζουμε από το Λογισμό την έννοια της **ροής** ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ διαμέσου προσανατολισμένης επιφάνειας Σ:

$$\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

όπου ο προσανατολισμός δίνεται από το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{n}$, κάθετο στην επιφάνεια. Εξηγήστε γιατί είναι λογικό να δίνεται το στοιχείο ροής διαμέσου επιφάνειας από το $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ και σχετίστε το με τον παραπάνω ορισμό του εξωτερικού γινομενου.

7. *Γραμμικοποίηση:* Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = (x^3 - xy^2, -y^3 + xy)$. Υπολογίστε την παράγωγο Df της f. Δείξτε ότι στο σημείο $(x_0, y_0) = (2, 2)$ η συνάρτηση είναι τοπικά αντιστρέψιμη.

Συγκρίνετε την ακριβή τιμή του διανύσματος διαφοράς $f(2.2, 1.8) - f(2, 2)$ με την προσεγγιστική τιμή που δίνει η γραμμικοποίηση:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \simeq Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}, \quad \text{εδώ:} \quad (x, y) = (2.2, 1.8), \ (x_0, y_0) = (2, 2).$$

ΕΚ, 8-10-15