Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Γεωμετρικη Θεωρια Ελεγχου
Δεύτερη Εργασία

1. Θεωρούμε το σύστημα ελέγχου στο επίπεδο, όπου είναι διαθέσιμα δύο *σταθερά* ΔΠ $X_1 = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ και $X_2 = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$ και επιτρέπεται να προχωρούμε με το ένα ή το άλλο ΔΠ, ή με τα αντίστροφά τους, δηλ. με τις ροές ϕ_{X_1} και ϕ_{X_2}.

   (α') Δείξτε ότι το *προσβάσιμο σύνολο* $\mathcal{R}(0,T)$ των σημείων που μπορούμε να φτάσουμε σε χρόνο $\leq T$ από το αρχικό σημείο 0 είναι το $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : ||B\mathbf{x}||_1 = c\}$, όπου $||\mathbf{x}||_1 = |x| + |y|$ είναι η 1-νόρμα και B είναι κατάλληλος 2×2 πίνακας. Βρείτε τον B και τη σταθερά c.

   (β') Εάν τώρα περιορίσουμε τον χώρο κατάστασης στο κλειστό τετράγωνο με κέντρο το 0 και πλάτος 2 (δεν επιτρέπεται να βγούμε από αυτόν), δείξτε ότι κάθε σημείο του εσωτερικού του είναι προσβάσιμο, αλλά για κάποια σημεία στο σύνορο, δεν μπορούμε να φτάσουμε με πεπερασμένο αριθμό αλλαγών ροής. Να βρεθούν τα σημεία αυτά, μαζί με τον χρόνο που απαιτείται για να τα φτάσουμε.

2. *Κυκλικότητα και Ελεγξιμότητα:* Έστω $v \in V^n$, $v \neq 0$ διάνυσμα και $T : V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε την ακολουθία των διανυσμάτων

$$\{v, Tv, T^2v, \ldots\}.$$

   (α') Έστω ότι το σύνολο αυτό περιλαμβάνει ακριβώς k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα — προφανώς ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων της ακολουθίας είναι n, οπότε $0 < k \leq n$. Δείξτε ότι τότε τα *πρώτα* k διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   (β') Ορίζουμε τον υποχώρο $\mathcal{I}(v) = \mathrm{span}(v, Tv, \ldots, A^{k-1}v)$. Δείξτε ότι είναι **αναλλοίωτος** για τη γραμμική αεικόνιση T. Εάν $\mathcal{I}(v) \neq V$ (δηλ. $k < n$), επιλέγουμε διάνυσμα $v' \in V - \mathcal{I}(v)$ και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, για να βρούμε αναλλοίωτο χώρο $\mathcal{I}(v')$ κοκ. Δείξτε ότι έτσι θα έχουμε βάση του V και δώστε τον πίνακα της T ως προς τη βάση αυτή.

   (γ') Ένα διάνυσμα b είναι **κυκλικό** εάν $\dim \mathcal{I}(b) = n$, συνθήκη που είναι ουσιαστικά η συνθήκη γραμμικής ελεγξιμότητας. Δείξτε ότι υπάρχει κυκλικό διάνυσμα για τη γραμμική απεικόνιση T εάν και μόνον εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της T συμπίπτει με το ελάχιστο πολυώνυμό της, $c_T(\lambda) = \mu_T(\lambda)$.

   (δ') Δείξτε ότι η γραμμική ελεγξιμότητα είναι γενική ιδιότητα, ισχύει δηλαδή για ανοικτό, πυκνό υποσύνολο των ζευγών $n \times n$ πινάκων και διανυσμάτων στο $\mathbf{R}^n$.

3. Για το C^∞ SISO σύστημα

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + u\,\mathbf{g}(\mathbf{x}),\ y = h(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3,$$

   η συνάρτηση εξόδου είναι $h(x,y,z) = x$. Δείξτε ότι για γενικό $\mathbf{g}$, $\mathcal{L}_{\mathbf{g}}h \neq 0$ σχεδόν παντού και δώστε τις εξισώσεις που προκύπτουν για να έχουμε $\mathcal{L}_{\mathbf{g}}h = 0$.

4. Θεωρούμε δύο ΔΠ $X, Y \in \mathcal{X}^\infty(M)$ στην πολλαπότητα M^n, με $n \geq 3$.

   (α') Δώστε τον τύπο για την αγκύλη Lie των X, Y σε τοπικές συντεταγμένες $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, οπότε η βάση γράφεται $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ για $i = 1, \ldots, n$.

   (β') Ορίζουμε το *ιδιάζον σύνολο*

$$\Sigma = \{p \in M : \exists a, b : [X, Y](p) = aX(p) + bY(p)\}$$

   όπου η αγκύλη δίνει διάνυσμα στον υποχώρο $\mathrm{span}(X(p), Y(p)) \subset T_pM$. Για γενικά ΔΠ, δείξτε ότι το Σ είναι υποπολλαπλότητα της M και βρείτε τη διάστασή της.

   (γ') Υπολογίστε την αγκύλη και το ιδιάζον σύνολο[1] Σ για τα ΔΠ

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = (x^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial x} + 0\frac{\partial}{\partial y} + 2xz\frac{\partial}{\partial z}.$$

5. (α') Είναι τα επίπεδα $P_1 = \mathrm{span}((2, 4, 2, 0), (-2, 3, 0, 1))$, $P_2 = \mathrm{span}((-4, 7, 4, -3), (6, 0, -3, 6))$ στο $\mathbf{R}^4$ εγκάρσια ή όχι;

   (β') Έστω $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ C^∞ συνάρτηση και H το οριζόντιο επίπεδο στο ΔΧ $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Δείξτε ότι για σχεδόν όλα τα c, το γράφημα της $f + c$ τέμνει το H εγκάρσια.

6. (α') Δείξτε ότι ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f στην πολλαπλότητα M είναι μη-εκφυλισμένο εάν το 1-τζετ του τέμνει τη μηδενική υποπολλαπλότητα $df = 0$ εγκάρσια.

   (β') Δείξτε ότι το ΣΙ 0 της $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ είναι εκφυλισμένο. Βρείτε διαταραχή g της f η οποία να είναι ϵ κοντά στην f (σε συμπαγή γειτονιά του 0) και να είναι συνάρτηση Morse.

7. Δίνεται η συνάρτηση συνολικής ενέργειας ή Χαμιλτονιανή στο $\mathbf{R}^2$

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x), \text{ με } U(x) = x^2(x^2 - 1)$$

   συνάρτηση δυναμικού. Το χαμιλτονιανό σύστημα είναι

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2x(1 - 2x^2).$$

   Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την τοπική δυναμική τους και δώστε γράφημα της ροής του (Υπόδειξη: η ενέργεια είναι σταθερή σε κάθε λύση.)

   Κατόπιν, εισάγουμε *απόσβεση* που αλλάζει τη δεύτερη εξίσωση σε $\dot{y} = 2x(1 - 2x^2) - 0.3y$. Δείξτε ότι έχουμε δύο ευσταθή σημεία ισορροπίας και ένα σάγμα και ότι η συνάρτηση H είναι συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα αυτό. Βρείτε τα σύνολα όπου η H δίνει την ευστάθεια των ΣΙ στον x-άξονα.

ΕΚ, 1-6-15

[1] Δώστε μόνο την εξίσωση των σημείων στο Σ.