Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικη Τοπολογια
Τρίτη Εργασία

1. Εξηγήστε γιατί μπορούμε να "σπάσουμε" κάθε *μακρά ακριβή ακολουθία* (μ.α.α) σε μία σειρά από ζεύγη *βραχέων ακριβών ακολουθιών* (β.α.α.) ως εξής: από την μ.α.α.

$$\dots \xrightarrow{f_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} C_n \xrightarrow{f_n} C_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

έχουμε, για κάθε n, δύο β.α.α.

$$0 \to C_{n+1}/\operatorname{im} f_{n+2} \xrightarrow{f_{n+1}} C_n \xrightarrow{f_n} \operatorname{im} f_n \to 0 \tag{1}$$

$$0 \to C_n/\operatorname{im} f_{n+1} \xrightarrow{f_n} C_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \operatorname{im} f_{n-1} \to 0 \tag{2}$$

2. Δώστε το υπόλοιπο της απόδειξης ότι βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσιδωτών συμπλόκων δίνει μακρά ακριβή ακολουθία σε ομολογία. *(Θεωρούμε δεδομένο τον ορισμό του συνεκτικού ομομορφισμού και χρειάζεται μόνο να δείξετε την ακρίβεια σε κάθε σημείο.)*

3. (α΄) Δείξτε ότι εάν ο υποχώρος A του X είναι παραμορφωτική σύμπτυξή του, τότε η σχετική ομολογία $H_*(X, A) = 0$.

   (β΄) Από την μακρά ακριβή ακολουθία ζεύγους, δείξτε ότι η σχετική ομολογία του ζεύγους (D^n, S^{n-1}) (κλειστός δίσκος και συνοριακή του σφαίρα), συμπίπτει με αυτή της σφαίρας S^n, για $n \geq 1$. Επιβεβαιώστε την απάντηση αυτή δείχνοντας ότι ο χώρος πηλίκο D^n/S^{n-1} είναι ομοιόμορφος με τη σφαίρα S^n.

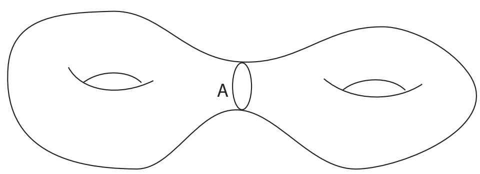
4. Υπολογίστε την ιδιάζουσα ομολογία H_* του τόρου T^2 και της φιάλης Klein K^2 από την ακολουθία Mayer-Vietoris. *(Για την K^2 πάρετε κάθετη τομή σε δύο συμμετρικά κομμάτια, όπως υποδείξαμε στο μάθημα.)*

5. Υπολογίστε τη σχετική ιδιάζουσα ομολογία των ζευγών (X, A):

   (α΄) $X = S^n$, και (α) $A =$ πεπερ. αριθμός διακριτών σημείων, (β) $A = S^{n-1}$ ο ισημερινός (δηλ. η σφαίρα $x_{n+1} = 0$).

   (β΄) $X = T^2$, ο τόρος και $A =$ πεπερ. αριθμός διακριτών σημείων.

   (γ΄) $X = \Sigma_2$, επιφάνεια γένους δύο και A ο κύκλος του παρακάτω σχήματος.



ΕΚ, 8-6-15