Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Γεωμετρικη Θεωρια Ελεγχου
Πρώτη Εργασία

1. Δώστε τη δομή πολλαπλότητας της σφαίρας $S^n = \{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ με τους δύο χάρτες που δίνονται από τη στερεογραφική προβολή από το Βόρειο και το Νότιο πόλο στο επίπεδο $z = 0$. Δώστε τους τύπους για τις προβολές και τις αντίστροφες απεικονίσεις τους, καθώς και τη συνάρτηση αλλαγής χάρτη από το $\mathbf{R}^n - 0$ στο $\mathbf{R}^n - 0$ –και δείξτε ότι είναι λεία.

2. *Διανυσματικά πεδία σε πολλαπλότητες:*

   (α΄) **Σφαίρα:** Θεωρούμε δύο τρόπους για να ορίσουμε ΔΠ στη σφαίρα S^2 (και οι δύο εκμεταλλεύονται το γεγονός ότι έχουμε εμβύθιση στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbf{R}^3$.)

   Ο πρώτος είναι με χρήση πολικών συντεταγμένων $(\theta, \phi) \mapsto \mathbf{r}(\theta, \phi)$ (εδώ $\theta \in (0, \pi)$ και $\phi \in (0, 2\pi)$). Δείξτε ότι τα ΔΠ $\mathbf{r}_\theta$, $\mathbf{r}_\phi$ δίνουν βάση του εφαπτόμενου χώρου στη σφαίρα σε κάθε σημείο όπου οι πολικές συντεταγμένες ορίζονται. Τα ΔΠ αυτά είναι τα ίδια με τα ΔΠ $\frac{\partial}{\partial\theta}$ και $\frac{\partial}{\partial\phi}$ που μελετήσαμε στη θεωρία, ή όχι; Ποιές είναι οι λύσεις των ΔΠ αυτών;

   Ένα ΔΠ στη σφαίρα δίνεται λοιπόν ως $X = a(\theta, \phi)\mathbf{r}_\theta + b(\theta, \phi)\mathbf{r}_\phi$. Πώς πρέπει να περιορίσουμε τις συναρτήσεις a, b έτσι ώστε να έχουμε καλά ορισμένο, λείο ΔΠ στη σφαίρα;

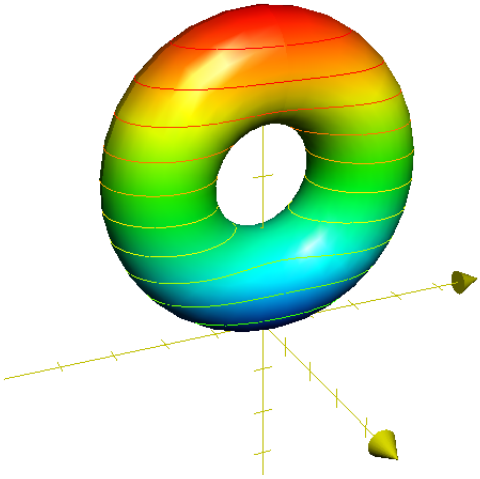
   Ο δεύτερος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι το ΔΠ $\mathbf{F}_h = (-y, x, 0)$ στο $\mathbf{R}^3$ αφήνει αναλλοίωτη τη σφαίρα S^2 —και κάθε σφαίρα με κέντρο το 0, καθώς $\mathbf{r}\cdot\mathbf{F} = 0$. Δείξτε ότι οι λύσεις το πεδίου αυτού συμπίπτουν με τις λύσεις του $\mathbf{r}_\phi$. Εάν ορίσουμε ένα δεύτερο ΔΠ από το εξωτερικό γινόμενο, $F_v = \mathbf{F}_h \times \mathbf{r}$, τότε και το $\mathbf{F}_v$ εφάπτεται της σφαίρας. Εξηγήστε προσεκτικά πώς θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα γενικό ΔΠ σε κάποιο υποσύνολο της σφαίρας από τα $\mathbf{F}_h, \mathbf{F}_v$. Συγκρίνετε τις δύο μεθόδους.

   (β΄) **Τόρος:** Εδώ θεωρούμε τον τόρο ως χώρο πηλίκο $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Εξηγήστε γιατί κάθε ΔΠ στο επίπεδο το οποίο είναι 2π–περιοδικό στο x και στο y δίνει λείο ΔΠ στον τόρο.

   Με χρήση λογισμικού, περιγράψτε τη δυναμική του ΔΠ

   $$\mathbf{F} = \cos(x)\sin(2y)\,\mathbf{i} + \sin(x + 2y)\,\mathbf{j}.$$

   Τέλος, μπορείτε να βρείτε αναλυτική μορφή για ΔΠ στον τόρο που αντιστοιχεί στην κλίση του πεδίου που δίνεται από τη συνάρτηση ύψους, όταν ο τόρος θεωρηθεί ως τοποθετημένος κατακόρυφα στο $\mathbf{R}^3$ (όπως στο Σχήμα);



3. Εάν $M^{n\times n}$ είναι ο ΔΧ όλων των $n\times n$ πινάκων με πραγματικά στοιχεία και $\det : M \to \mathbf{R}$ είναι η απεικόνιση ορίζουσας, ποιό από τα δύο υποσύνολα του M, $N = \{\det A = 0\}$ και $Gl(n) = \{\det A \neq 0\}$ είναι πολλαπλότητα; (προσοχή στη διάσταση n.)

   Δείξτε ότι το υποσύνολο $Sl(n) = \{\det A = 1\}$ δίνει υπο-πολλαπλότητα *(υπόδειξη: δείξτε ότι είναι κανονική τιμή της συνάρτησης* $\det$*.)*

4. Δώστε τους τρείς πρώτους όρους της σειράς Taylor για τις συνθέσεις γραμμικών ροών:

$$e^{tA}e^{tB} \quad \text{και} \quad e^{-tA}e^{-tB}e^{tA}e^{tB}.$$

   Στην πρώτη περίπτωση, εκφράστε την απάντησή σας μέσω των όρων της σειράς Taylor της $e^{t(A+B)}$ και κατάλληλων αγκυλών Lie (στην άλγεβρα Lie πινάκων). Τί εικάζετε ότι θα έχουμε συνολικά; Δείξτε ότι εάν $AB = BA$, τότε $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$, $\forall t$.

5. Υπολογίστε την αγκύλη Lie των ΔΠ στο χώρο $\mathbf{R}^3$:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ y^2 \\ x \end{bmatrix}.$$

   Δείξτε επομένως ότι το σύστημα ελέγχου $\dot{x} = u_1\mathbf{F} + u_2\mathbf{G}$ ικανοποιεί τη συνθήκη μη-γραμμικής ελεγξιμότητας σχεδόν παντού στο χώρο (η άλγεβρα Lie ελέγχου, που παράγεται δηλαδή από τα ΔΠ $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ έχει βαθμό ίσο με τρία σχεδόν παντού).

   Δείξτε ότι τα επίπεδα $x = 0$ και $y = 0$ είναι αναλλοίωτα για το ΣΕ και επομένως βρείτε τα μέγιστα σύνολα προσβασιμότητας του ΣΕ αυτού.

6. Επαληθεύστετε την ισότητα $[X, Y] = \mathcal{L}_X(Y)$ στην περίπτωση που τα ΔΠ $X = Ax$, $Y = Bx$ είναι γραμμικά (το δεξί μέλος δίνει την παράγωγο Lie του Y ως προς τη ροή του X).

ΕΚ, 2-5-15