Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Αλγεβρικη Τοπολογια

Δεύτερη Εργασία

1. Δείξτε ότι αν $r : X \to A$ είναι σύμπτυξη (retraction) και ο X είναι Hausdorff, τότε το υποσύνολο A είναι κλειστό.

2. Δείξτε ότι ο κύκλος $S^1 \times \{p\}$ είναι σύμπτυξη του τόρου $S^1 \times S^1$ (όπου p σημείο του δεύτερου παράγοντα/κύκλου), αλλά δεν υπάρχει παραμορφωτική σύμπτυξη.

3. Δείξτε ότι ο ισομορφισμός που παίρνουμε για τις θεμελιώδεις ομάδες με την αλλαγή του σημείου βάσης εξαρτάται μόνον από την κλάση ισοδυναμίας του μονοπατιού που συνδέει τα δύο σημεία. Περιγράψτε τί συμβαίνει εάν η θεμελιώδης ομάδα είναι αβελιανή.

   Δώστε παράδειγμα χώρου (με μη-αβελιανή θεμ. ομάδα) και δύο αλλαγές σημείου βάσης με μονοπάτια μη-ομοτοπικά που να δίνουν διαφορετικούς ισομορφισμούς της ομάδας.

4. (α΄) Δώστε παράδειγμα 1:1 συνεχούς συνάρτησης $f : X \to Y$ για την οποία ο ομομορφισμός $f_* = \pi_1(f)$ δεν είναι 1:1.

   (β΄) Δώστε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f : X \to Y$ που είναι επί, για την οποία ο ομομορφισμός $f_* = \pi_1(f)$ δεν είναι επί.

5. Είδαμε ότι αν $r : X \to A$ είναι σύμπτυξη και $i : A \hookrightarrow X$ ο εγκλεισμός, τότε έχουμε ότι ο ομομορφισμός i_* είναι 1:1.

   Δείξτε ότι ο r_* είναι επί και επομένως, εάν η $i_*\pi_1(A, x)$ είναι *κανονική* υπο-ομάδα της $\pi_1(X, x)$, τότε η $\pi_1(X, x)$ είναι το ευθύ άθροισμα των $\operatorname{im} i_*$ και $\ker r_*$.

6. Μία ομάδα G λέγεται **τοπολογική ομάδα** εάν έχει δομή τοπολογικού χώρου με τις απεικονίσεις γινομένου και αντιστρόφου να είναι συνεχείς:

   $$\mu : G \times G \to G, \quad \iota : G \to G,$$

   όπου $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ και $\iota(g) = g^{-1}$. Θεωρούμε τη θεμελιώδη ομάδα της G με σημείο βάσης τη μονάδα e. Εάν f, g είναι βρόχοι βασισμένοι στο e, ορίζουμε βρόχο γινόμενο $f \cdot g$ μέσω του γινομένου στην G: $(f \cdot g)(t) = f(t)g(t)$, $t \in I$.

   Δείξτε ότι το γινόμενο των f, g στην π_1 είναι στην ίδια κλάση ομοτοπίας με τον παραπάνω βρόχο γινόμενο, $f * g \sim f \cdot g$, αλλά και $f \cdot g \sim g * f$, και επομένως η θεμελιώδης ομάδα της G είναι αβελιανή.

7. Στον τόρο $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, με α, β τους βρόχους

$$\alpha(t) = (e^{2\pi i t}, 1), \quad \beta(t) = (1, e^{2\pi i t}),$$

   δείξτε (με χρήση κατάλληλου διαγράμματος) ότι $\alpha * \beta = \beta * \alpha$.

8. Δείξτε, με χρήση του θεωρήματος των Seifert-van Kampen ότι $\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z}$.

9. Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου που παίρνουμε από δύο αντίτυπα του τόρου $S^1 \times S^1$ με ταύτιση του ενός κύκλου $S^1 \times \{x_0\}$ στον πρώτο τόρο με τον αντίστοιχο κύκλο $S^1 \times \{x_0\}$ στο δεύτερο τόρο.

ΕΚ, 1-4-15