Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

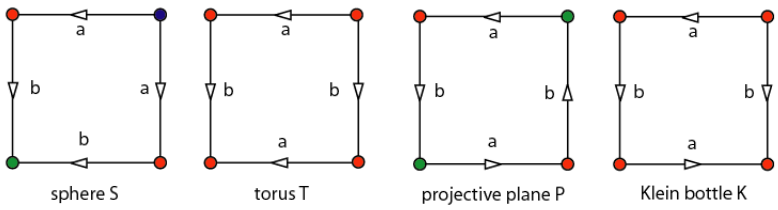
Αλγεβρικη Τοπολογια
Πρώτη Εργασία

1. Διαβάστε το πρώτο κεφάλαιο των σημειώσεων και απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις που βρίσκονται μέσα στο κείμενο (υπάρχουν οκτώ τέτοια ερωτήματα, με πλάγια γραμματοσειρά, σε παρενθέσεις).

2. Σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ εάν ένας μορφισμός $f \in \mathrm{Mor}\,(A,B)$ έχει αριστερό αντίστροφο δηλαδή $g \in \mathrm{Mor}\,(B,A)$ με $g \circ f = \mathrm{id}_A$ και δεξί αντίστροφο $h \in \mathrm{Mor}\,(B,A)$ (με $f \circ h = \mathrm{id}_B$), τότε $g = h$. Δείξτε επίσης ότι ο ταυτοτικός id_A σε κάθε $\mathrm{Mor}\,(A,A)$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι μοναδικός.

3. Δείξτε ότι εάν M είναι *μονοειδές* (ορίζεται δηλαδή προσεταιριστική πράξη και υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο), τότε μπορούμε να ορίσουμε κατηγορία $\mathcal{C}$ με Ob σύνολο με ένα στοιχείο, ας το πούμε $*$, μορφισμούς $\mathrm{Mor}\,(*,*) = M$ και ¨σύνθεση¨ βελών το γινόμενο στο M. Έτσι βλέπουμε πάλι ότι οι μορφισμοί μίας κατηγορίας δεν είνα απαραίτητα συναρτήσεις.

4. Υπολογίστε τη χαρακτηριστική του Euler της σφαίρας, του τόρου, του προβολικού επιππέδου και της φιάλης του Klein. Από την θεώρημα ταξινόμησης συμπαγών επιφανειών, η επιφάνεια Σ_g παράγεται από την ταύτιση των πλευρών κανονικού πολυγώνου με $2g$ πλευρές με τον εξής τρόπο (παίρνουμε με τη σειρά τις πλευρές):
$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, \text{ π.χ. για τον τόρο}: \quad aba^{-1}b^{-1}.$$
(Συμβουλευτείτε για παράδειγμα το βιβλίο του Massey.) Δείξτε ότι επομένως $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$.



5. Δείξτε ότι:

   (α΄) Το επίπεδο μείον πεπερασμένο αριθμό διακριτών σημείων έχει ως παραμορφωτικό σύμπτυγμα ένα ¨μπουκέτο¨ κύκλων, δηλαδή κύκλους με ένα κοινό σημείο.

   (β΄) Ο χώρος $\mathbf{R}^3$ μείον η ευθεία $\{(0,0,z) : z \in \mathbf{R}\}$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του κύκλου S^1. Γενικότερα, για $m < n$, ο χώρος $\mathbf{R}^n - \mathbf{R}^m$ έχει τον τύπο ομοτοπίας σφαίρας S^{n-m-1}.

   (γ΄) Ο τόρος T^2 μείον ένα σημείο του έχει τον τύπο ομοτοπίας μπουκέτου δύο κύκλων.

   (δ΄) Η ταινία του Möbius έχει τον τύπο ομοτοπίας του κύκλου, αλλά δεν είναι ομοιόμορφος με το γινόμενο $S^1 \times [0,1]$.

ΕΚ, 5-3-15