



Γραμμική Άλγεβρα
Τελική Εξέταση – 19 Ιανουαρίου 2015
Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

Όνοματεπώνυμο _____

A.M. (Πέντε από τα τελευταία 6 ψηφία: π.χ. 15XXX) _____

Θέμα	1	2	3	4	Σύνολο
Μονάδες	25	30	30	15	100
Βαθμός					

1. Θεωρούμε το σύνολο M των 2×2 πινάκων με πραγματικά στοιχεία,

$$M = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}, x_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

Δείξτε ότι είναι διανυσματικός χώρος και δώστε τη διάστασή του. Εάν

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

είναι πραγματικός πίνακας με $\det A \neq 0$, δείξτε ότι η απεικόνιση: $T : X \mapsto AX$ είναι γραμμική και αντιστρέψιμη και δώστε τον πίνακά της (ως προς την κανονική βάση). Τέλος, εάν $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$, δώστε τις ιδιοτιμές της T , καθώς και τις αλγεβρικές και γεωμετρικές τους πολλαπλότητες.

(25)

2. Δώστε τις ιδιότητες της συνάρτησης όγκου-με-πρόσημο (σε πραγματικό $\Delta.X$. διάστασης n) που ονομάζουμε **ορίζουσα**:

$$\det(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \text{όπου } a_i \in \mathbf{R}^n.$$

Επομένως, δείξτε ότι

$$\det(kA) = k^n \det A, \quad k \in \mathbf{R}.$$

Δείξτε επίσης ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα kA είναι $\mu_i = k\lambda_i$, $i = 1, \dots, n$, όπου $\{\lambda_i\}$ είναι οι ιδιοτιμές του A .

Οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -5/2 & -5/2 \\ 5/2 & 9/2 & 5/2 \\ -5 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

είναι οι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -3$, με αλγεβρικές πολλαπλότητες $m_1 = 2$, $m_2 = 1$. Βρείτε από τα παραπάνω τις ιδιοτιμές του πίνακα $\tilde{A} = (-2)A$ και κατόπιν βρείτε κατάλληλα ιδιοδιανύσματα (γενικευμένα ή μη) που δίνουν την κανονική μορφή (Jordan) του \tilde{A} . Δώστε τη μορφή αυτή.

(30)

3. Η αλλαγή βάσης στο \mathbf{R}^3 , $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}$ δίνεται από τον πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εάν x_i ($i = 1, 2, 3$) είναι οι συντεταγμένες ως προς τη βάση \mathcal{B} και z_i οι συντεταγμένες ως προς τη βάση \mathcal{F} , βρείτε την **αλλαγή μεταβλητών** (ή συντεταγμένων) που δίνει τις z_i ως προς τις x_i (πρέπει να υπολογίσετε *αντίστροφο* πίνακα του P).

Εάν η αρχική βάση \mathcal{B} είναι η κανονική, βρείτε τα διανύσματα βάσης της \mathcal{F} και εφαρμόστε τη διαδικασία των Gram-Schmidt για να ορθοκανονικοποιήσετε τη βάση \mathcal{F} .

(30)

4. (α) Η γραμμική απεικόνιση $T : V^n \rightarrow W^m$ είναι 1:1. Τί μπορείτε να πείτε για τις διαστάσεις n και m ; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(β) Οι γραμμικές απεικονίσεις: $S : U \rightarrow V$, $T : V \rightarrow W$ μεταξύ Δ.Χ. διάστασης ≥ 2 δίνουν μηδενική σύνθεση: $T \circ S(u) = 0_W$, $\forall u \in U$. Σημαίνει αυτό ότι η μία από τις δύο πρέπει να είναι μηδενική; Αν ναι, δείξτε το. Αν όχι, δώστε αντι-παράδειγμα. Βρείτε μιά σχέση μεταξύ των υποχώρων $\text{im } S$ και $\text{ker } T$ του V .

(15)