



Γραμμική Άλγεβρα

Πρόοδος Δεύτερη – 8 Ιανουαρίου 2015

Διάρκεια εξέτασης 30 λεπτά

Όνομα _____

A.M. (Τελευταία 5 ψηφία: π.χ. 15XX X) _____

Θέμα	1	2	3	4	Σύνολο
Μονάδες	3	3	2	2	10
Βαθμός					

1. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πραγματικού πίνακα είναι

$$c_A(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1).$$

- (α) Δώστε τη μορφή Jordan και την ορίζουσα του A . Δώστε επίσης και μία *πραγματική* κανονική μορφή.
(β) Με χρήση του θεωρήματος Cayley-Hamilton βρείτε συντελεστές a, b, c τέτοιους ώστε

$$A^{-1} = aA^2 + bA + cI.$$

(3)

2. Για κάθε παρακάτω πρόταση, αποφασίστε αν αληθεύει ή όχι και δικαιολογήστε πλήρως τη γνώμη σας.

- (α) Η απαλοιφή Gauss για ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων δείχνει ότι με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών, μπορούμε να φέρουμε ένα σύστημα σε άνω τριγωνική μορφή, με μονάδες στα διαγώνια στοιχεία.
(β) Με κατάλληλη αλλαγή βάσης, μπορούμε πάντοτε να εκφράσουμε τον πίνακα ενός ενδομορφισμού πραγματικού ή μιγαδικού $\Delta.X. V$ με $\dim V < \infty$ σε άνω τριγωνική μορφή.

(3)

3. Δώστε **τέσσερα** διανύσματα στον πραγματικό $\Delta.X. \mathbf{R}^3$, τέτοια ώστε οποιαδήποτε **τρία** από αυτά να αποτελούν βάση.

(2)

4. Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων, σε διανυσματική μορφή, είναι $Ax = b$, με A έναν 5×7 πίνακα, και $\text{rank } A = 3$. Δώστε συνθήκη για την ύπαρξη λύσης. Σε περίπτωση που υπάρχει λύση, περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο των λύσεων και δώστε τη μορφή του.

(2)