



Γραμμική Άλγεβρα

Πρόοδος πρώτη – 20 Νοεμβρίου 2014

Διάρκεια εξέτασης 30 λεπτά

Όνομα _____
A.M. (5 ψηφία: π.χ. 15XX X) _____

Θέμα	1	2	3	4	Σύνολο
Μονάδες	2 ^{1/2}	2	3 ^{1/2}	2	10
Βαθμός					

1. Με απαλοιφή Γαουβ, βρείτε τις λύσεις του 3×3 συστήματος γραμμικών εξισώσεων $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ k \end{bmatrix}$$

για την τιμή $k = 3$. Τι λύσεις υπάρχουν για $k \neq 3$; Δώστε μία σύντομη γεωμετρική εξήγηση.

(2^{1/2})

2. Υπολογίστε τον όγκο στο \mathbf{R}^4 του γενικευμένου παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα τέσσερα διανύσματα στήλης του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2)

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, δώστε *απόδειξη*, εάν είναι αληθής, ή *αντιπαράδειγμα*, εάν δεν είναι.

(α') Μία γραμμική απεικόνιση $T : V^n \rightarrow V^n$ είναι 1:1 εάν και μόνο εάν είναι επί.

(β') Εάν για τη γραμμική απεικόνιση $S : V^n \rightarrow W^m$ έχουμε $\dim \ker S > 0$, τότε $n > m$.

(3^{1/2})

4. Έχουμε γραμμικές απεικονίσεις

$$\mathbf{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbf{R}^5 \xrightarrow{T} \mathbf{R}^2,$$

με την S 1:1 και την T επί. Δώστε τις διαστάσεις των $U = \text{im}S$ και $V = \ker T$. Τι μπορείτε να πείτε για τη διάσταση της τομής τους $U \cap V$;

(2)