Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Γραμμικη Αλγεβρα

Έβδομο Σετ Ασκήσεων

1. Δίνεται γραμμική απεικόνιση $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ που εκφράζεται ως προς μία βάση από τον πίνακα A, και διάνυσμα $v \in \mathbf{R}^3$, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι τα διανύσματα v, Av, A^2v είναι γραμμικά ανεξάρτητα —και επομένως **βάση** του $\mathbf{R}^3$. Δώστε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης που εκφράζει ο A *ως προς τη νέα αυτή βάση* (εκφράστε το $A(A^2v)$ ως προς τη βάση). Πίνακες αυτής της μορφής λέγονται *συνοδοί κανονικές μορφές* —companion canonical forms. Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A από τη μορφή αυτή.

Γενικεύοντας, εάν για κάποιο $v \in \mathbf{R}^n$, τα $\{v, Av, A^2v, \dots A^{n-1}v\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, βρείτε την συνοδό κανονική μορφή του A και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

2. (αʹ) Δώστε την **αλλαγή μεταβλητών** που προκύπτει από την *αλλαγή βάσης* $\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{F}$ με πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(βʹ) Δώστε την **αλλαγή βάσης** που προκύπτει από την *αλλαγή μεταβλητών*:

$$\begin{cases} u &= x + y + z \\ v &= x - y \\ w &= 2x + y + 3z \end{cases},$$

καθώς και την αντίστροφη αλλαγή μεταβλητών.

3. (αʹ) Δείξτε ότι ο τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του A.

(βʹ) Δείξτε ότι εάν λ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου A, $\lambda \neq 0$, τότε το $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.

(γʹ) Δώστε το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα $A - sI$, για $s \in \mathbf{C}$, εάν ο A έχει ιδιοτιμές:

$$\mathrm{Spec}\,(A) = \{\lambda_1, \lambda_1, \dots \lambda_n\}.$$

4. Βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε βάση του χώρου $\mathbf{R}^3$ ως προς την οποία η γραμμική απεικόνιση που δίνει ο A να είναι διαγώνια.

ΕΚ, 6-12-14