ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
Όγδοο σετ Ασκήσεων

1. (α΄) Υπολογίστε την τιμή της συνάρτησης $\phi(n)$ του Euler για $n = 225$ και $n = 600$.

   (β΄) Βρείτε όλα τα n για τα οποία $\phi(n)$ είναι περιττός αριθμός —και δώστε απόδειξη.

2. (α΄) Στο $\mathbf{Z}_{20}$ βρείτε όλα τα στοιχεία τα οποία έχουν *αντίστροφο*, δηλαδή για τέτοιο $[a] \in \mathbf{Z}_{20}$, υπάρχει $[b] \in \mathbf{Z}_{20}$ με $ab \equiv 1 \mod 20$.

   (β΄) Στο $\mathbf{Z}_{20}$ βρείτε όλους τους *διαιρέτες του μηδενός*, δηλαδή μη-μηδενικά στοιχεία $[a]$ τέτοια ώστε να υπάρχει $[b]$ με $ab \equiv 0 \mod 20$.

   (γ΄) Εξηγήστε γιατί τα παραπάνω υποσύνολα εξαντλούν **όλα** τα μη-μηδενικά στοιχεία του $\mathbf{Z}_{20}$, αλλά και γενικού $\mathbf{Z}_n$ και γιατί το πρώτο σύνολο δίνει *ομάδα* —την πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbf{Z}_n)^\times$.

   (δ΄) Βρείτε το αντίστροφο του κάθε στοιχείου της $(\mathbf{Z}_{20})^\times$. Είναι μοναδικό;

   (ε΄) Δώστε όλα τα γινόμενα μη-μηδενικών στοιχείων που δίνουν μηδέν: $ab \equiv 0 \mod 20$. Είναι μοναδικό το $[b]$, για κάθε $[a]$;

   (ϛ΄) Δείξτε ότι γενικά στο $\mathbf{Z}_n$, αν $\gcd(a, n) = d$, τότε $ab \equiv 0 \mod n$ συνεπάγεται ότι $b \equiv 0 \mod (n/d)$. Δείξτε επομένως ότι δεν ισχύει ο *κανόνας διαγραφής*: για c μη-μηδενικό, $ca \equiv cb \mod n$ δεν συνεπάγεται ότι $a \equiv b \mod n$, αλλά έχουμε $a \equiv b \mod (n/d)$. Δώστε παραδείγματα στο $\mathbf{Z}_{20}$.

3. Δώστε τον πίνακα *πρόσθεσης* στο $\mathbf{Z}_4$ και τον πίνακα *γινομένου* στο $(\mathbf{Z}_5)^\times$ και δείξτε ότι, με κατάλληλη αντιστοίχιση, είναι ίδιοι. Στο δεύτερο σύνολο, δείξτε ότι τα στοιχεία του μπορούν να γραφούν ως δυνάμεις ενός μη-ταυτοτικού στοιχείου και, επιπλέον, ότι υπάρχει φυσικός k τέτοιος ώστε $a^k \equiv 1$ για όλα τα $[a] \in (\mathbf{Z}_5)^\times$.

4. Δείξτε ότι ο κανόνας διαγραφής ισχύει στο $\mathbf{Z}_p$, με p *πρώτο*: αν $[c][a] = [c][b]$ και $[c] \neq [0]$, τότε $[a] = [b]$.

ΕΚ, 22-12-2014