



ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Έβδομο σετ Ασκήσεων

[Στο σετ αυτό περιλαμβάνονται και ασκήσεις κάποιας δυσκολίας. Ασχοληθείτε με όλες, αλλά δεν πειράζει αν δεν τις κάνετε όλες. Μην παραλείψετε να επαληθεύσετε τις προτάσεις για μικρές τιμές του n .]

1. (α') Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n , ο αριθμός $n^5 - n$ διαιρείται με το 5.
(β') Δείξτε ότι ο αριθμός $11^{10} - 1$ διαιρείται με το 100.
(γ') Δείξτε ότι για κάθε φυσικό n , ο $3^{6n} - 2^{6n}$ διαιρείται με το 35.
(δ') Βρείτε όλους τους πρώτους της μορφής $n^3 - 1$.
2. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό n , υπάρχει πρώτος αριθμός $p > n$, χρησιμοποιώντας τον αριθμό $n! + 1$. Εξηγήστε γιατί έχουμε έτσι μίαν άλλη απόδειξη της ύπαρξης απείρων πρώτων αριθμών.
3. Δείξτε ότι ο αριθμός $2222^{5555} + 5555^{2222}$ διαιρείται με το 7.
4. Δώστε κριτήριο για να διαιρείται ένας αριθμός με το 11.
5. Δείξτε ότι, για κάθε φυσικό n , υπάρχουν n διαδοχικοί φυσικοί που δεν είναι πρώτοι.
6. Εάν ο αριθμός $2^n + 1$ είναι πρώτος, τότε ο αριθμός n είναι δύναμη του 2 —δώστε απόδειξη.
7. Αποδείξτε ότι ένας αριθμός που σε δεκαδική μορφή αποτελείται από 3^n ίδια ψηφία διαιρείται με το 3^n —π.χ. ο 444 διαιρείται με το 3 (προχωρήστε επαγωγικά.)
8. Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $3n + 2$.

ΕΚ, 6-12-2014