



ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Έκτο Σετ Ασκήσεων

1. Βρείτε έξι διανύσματα στο \mathbf{R}^3 τέτοια ώστε οποιαδήποτε επιλογή τριών από αυτά να δίνει βάση του \mathbf{R}^3 .
2. Δείξτε ότι τα διανύσματα

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

εκφρασμένα στο \mathbf{R}^4 ως προς την κανονική βάση \mathcal{E} είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Το διάνυσμα $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ ανήκει στο $\text{span}(u, v, w)$;

3. Βρείτε τον πυρήνα $\ker T$ όταν, ως προς την κανονική βάση \mathcal{E} , η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^2$ έχει πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Βρείτε όλες τις λύσεις του Συστήματος Γραμμικών Εξισώσεων $Ax = b$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & -9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Δώστε **βάσεις** για τον πυρήνα $\ker T$ και την εικόνα $\text{im } T$ της γραμμικής απεικόνισης T που δίνει ο πίνακας A ως προς την κανονική βάση. Κάνετε ένα σχήμα που να δείχνει και το b στο \mathbf{R}^3 και να εξηγεί τις λύσεις που βρήκατε. Τέλος, δώστε *συμπληρωματικούς* χώρους W του $\ker A$ και Z της εικόνας $\text{im } A$. (Δύο υποχώροι ενός Δ.Χ. λέγονται *συμπληρωματικοί* εάν ο χώρος είναι το ευθύ άθροισμά τους.)

Bonus: Τι μπορείτε να πείτε για τη γραμμική απεικόνιση $T : W \rightarrow \text{im } T$; (δηλ. όταν περιοριστεί στον υποχώρο W και έχει πεδίο τιμών την εικόνα.)