



ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Πέμπτο Σετ Ασκήσεων

1. Υπολογίστε τον όγκο στο \mathbb{R}^3 του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα τρία διανύσματα

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_B, v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}_B,$$

γραμμένα ως προς τη βάση

$$B = \{(1, 2, 0), (0, 3, 1), (2, 1, 1)\}.$$

(Η κανονικοποίηση της συνάρτησης \det είναι $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$, όπου $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ είναι η κανονική βάση —π.χ. $e_2 = (0, 1, 0)$.)

2. Υπολογίστε τις οριζουσες των παρακάτω 3×3 πινάκων με τρεις τρόπους: (α) απευθείας από τον ορισμό με γινόμενα τριάδων διαγωνίων, (β) με ανάπτυγμα σειράς ή στήλης της επιλογής σας και τέλος (γ) με πράξεις στις σειρές ή στήλες που δίνουν τριγωνικό πίνακα.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Υπολογίστε την οριζουσα του 4×4 πίνακα με δύο τρόπους: (α) με ανάπτυγμα σειράς ή στήλης της επιλογής σας και (β) με πράξεις στις σειρές ή στήλες που δίνουν τριγωνικό πίνακα.

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Ένας πίνακας λέγεται πίνακας μετάθεσης εάν κάθε σειρά και κάθε στήλη έχει ένα μόνο μη-μηδενικό στοιχείο, το οποίο είναι μονάδα, π.χ.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(α') Σε γενική διάσταση n , δείξτε ότι πίνακες μετάθεσης δίνουν μετάθεση των συντεταγμένων (x_1, x_2, \dots, x_n) ως προς βάση και περιγράψτε τη μορφή πινάκων μετάθεσης που δίνουν (α) εναλλαγή και (β) κυκλική μετάθεση.

(β') Δώστε το πίνακα της γραμμικής απεικόνισης $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_4, x_3, x_2, x_1)$.